Elementele neliniare pot avea "memorie".

Pentru $u(t) = A\sin\omega t,\ \int_0^t u(t)dt = \omega^{-1}A(1-\cos\omega t),$

rezultă: $\boxed{A\sin\omega t} = u(t),\ \boxed{A\cos\omega t} = -\omega\int_0^t u(t)dt + A.$

Cu $N_R(A) = \mathrm{Re}\,N(A) = \dfrac{A_1}{A},\quad N_I(A) = \mathrm{Im}\,N(A) = \dfrac{B_1}{A}$

se scrie: $v(t) \cong v_1(t) = A_1\sin\omega t + B_1\cos\omega t = N_R\underbrace{\boxed{A\sin\omega t}}_{u(t)} + N_I\underbrace{\boxed{A\cos\omega t}}_{-\omega\int_0^t u(t)dt + A.}$

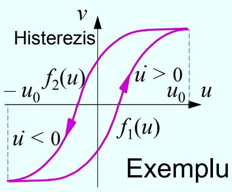
Rezultă: $v(t) \cong N_R(A)u(t) - \boxed{\omega N_I(A)\int_0^t u(t)dt} + AN_I(A).$

Elementul neliniar are $\boxed{\text{"memorie"}}$.

Există numai dacă $N_I(A) \neq 0$ – cazul neliniarit. multivalente.

Teorema 1

Fie neliniaritatea bivalentă:



$$f(u) = \begin{cases} f_1(u), & \dot u > 0, \\ f_2(u), & \dot u < 0, \quad f_1(u) \equiv f_2(u),\ |u| \ge u_0. \end{cases}$$

Atunci $N_I(A) = -\dfrac{S}{\pi A^2},\ A \ge u_0,\ S$ – aria dintre $f_1(u)$ şi $f_2(u)$.

$\mathcal{D}$. Cu (1.5), (1.10) şi (1.12) se calculează $N_I(A)$ astfel:

$$N_I(A) = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\omega t)\cos\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi A^2}\left[\int_0^{\pi/2} f(A\sin\omega t)A\cos\omega t d(\omega t) + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(A\sin\omega t)A\cos\omega t d(\omega t) + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(A\sin\omega t)A\cos\omega t d(\omega t)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi A^2}\left[\int_0^A f_1(u)du + \int_A^{-A} f_2(u)du + \int_{-A}^0 f_1(u)du\right] = \frac{-1}{\pi A^2}\int_{-A}^A [f_2(u) - f_1(u)]du = -\frac{S}{\pi A^2}. \blacksquare$$

Exemplul 1.1 Neliniaritatea de tip releu (fig.VII.1):

1° bipozițional (ideal): $q=1, a=0, b>0$;

2° bipozițional cu histerezis: $q=-1, a>0, b>0$;

3° tripozițional (ideal): $q=1, a>0, b>0$;

4° releu tripozițional cu histerezis: $|q|<1, a>0$.

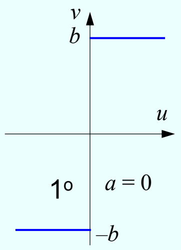
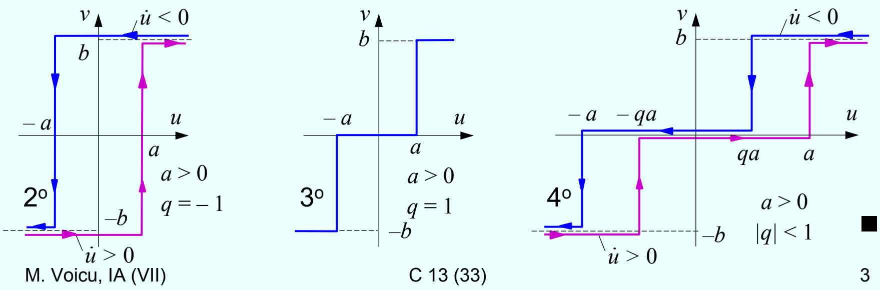


Fig.VII.1



■

Exemple de utilizare a regulatoarelor de tip releu

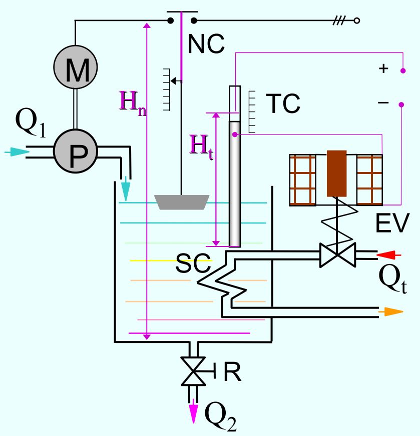
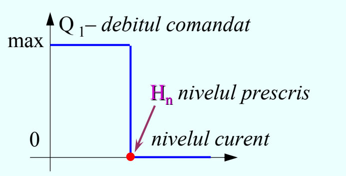
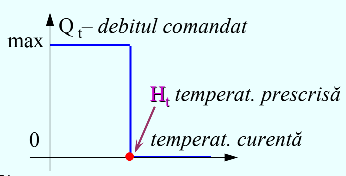


Fig. I.3. Ex. 2.2

Regulator de nivel:
nivelmetrul cu contact (NC)



Regulator de temperatură:
termometrul cu contact (TC)



■

Exemplu – fig. VII.1

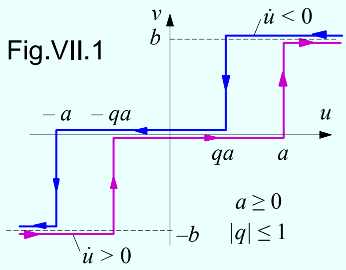
Să se calculeze

funcția de descriere $N(A)$

şi funcția de descriere

invers negativă $N_i(A)$.

Fig.VII.1



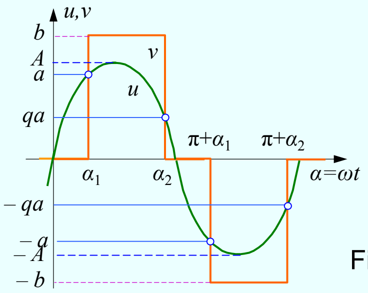


Fig.VII.5

Evoluții temporale:

$u(t) = A\sin\omega t,$

$\alpha = \omega t,$

$$\sin\alpha_1 = \frac{a}{A},$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{qa}{A}.$$

Cf. (1.12) şi fig.VII.5 (cazul 4°) se poate scrie:

$$N_R(A) = \frac{A_1}{A} = \frac{2}{\pi A}\int_0^{\pi} v(t)\sin\omega t d(\omega t) =$$

$$= \frac{2b}{\pi A}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{2b}{\pi A}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{a}{A},\quad \cos\alpha_1 = \sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}},$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{qa}{A},\quad \cos\alpha_2 = -\sqrt{1-\frac{q^2a^2}{A^2}}.$$

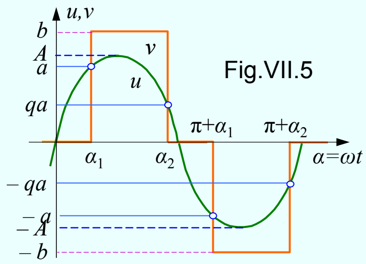
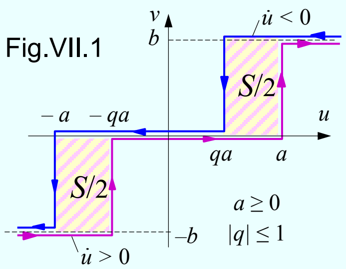


Fig.VII.5

Partea reală a funcției de descriere este:

$$N_R(A) = \frac{2b}{\pi A}\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}} + \sqrt{1-\frac{q^2a^2}{A^2}}\right),\quad A \geq a.$$

Fig.VII.1



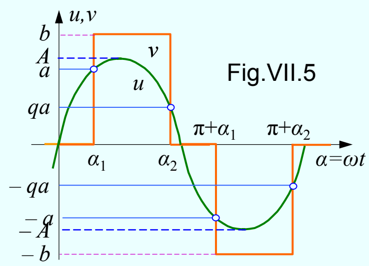


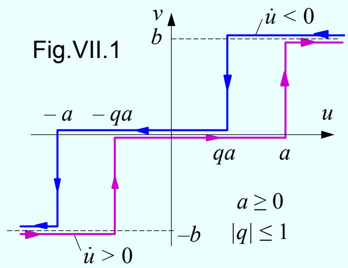
Fig.VII.5

$$\frac{S}{2} = (a - qa)b = ab(1-q).$$

Partea imaginară, conform teoremei 1:

$$N_I(A) = -\frac{S}{\pi A^2} = -\frac{2ab}{\pi A^2}(1-q),\ A \geq a.$$

Fig.VII.1



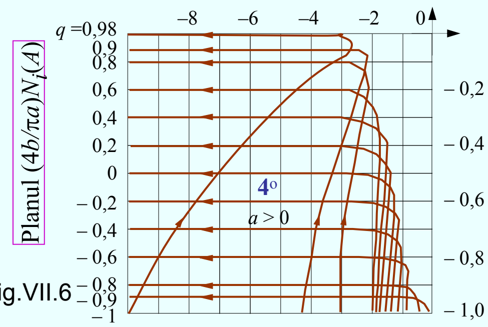


Fig.VII.6

4° Releul tripozițional cu histerezis: $|q| < 1,\ a > 0,\ b > 0,$

$$N(A) = \frac{2b}{\pi A}\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{q^2 a^2}{A^2}}\right) - j\frac{2ab}{\pi A^2}(1-q), \quad A \geq a;$$

$$N_i(A) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A^2}{4ab} \frac{\sqrt{\frac{A^2}{a^2} - q^2} + j(1-q)}{\frac{A^2}{a^2} - q^2 + \sqrt{\left(\frac{A^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{A^2}{a^2} - q^2\right)}}, \quad A \geq a.$$

În primele trei cazuri se obțin (fig.VII.6):

1° Releul bipozițional (ideal): $q=1,\ a=0,\ b>0,$

$$N(A)=\frac{4b}{\pi A},\quad N_i(A)=-\frac{\pi A}{4b},\quad A>0.$$

2° Releul bipozițional cu histerezis: $q=-1,\ a>0,\ b>0,$

$$N(A)=\frac{4ab}{\pi A^2}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1}-j\right),\quad N_i(A)=-\frac{\pi A^2}{4b}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1}+j\right),\quad A\geq a.$$

3° Releul tripozițional (ideal): $q=1,\ a>0,\ b>0,$

$$N(A)=\frac{4ab}{\pi A^2}\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1},\quad N_i(A)=-\frac{\pi A^2}{4b}\Big/\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1},\quad A>a.$$

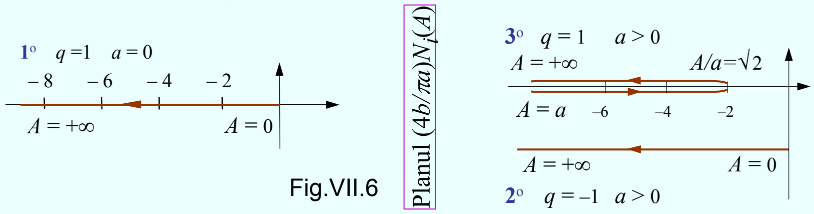


Fig.VII.6 ■

b. Calculul aproximativ al funcției de descriere

Pt. f univalentă ($\Rightarrow$ impară), A_1 din se calculează cu:

$$A_1=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(A\sin\omega t)\sin\omega t d(\omega t).$$

Cu $x=\sin\omega t,\ dx=\cos\omega t d(\omega t)$ şi $g(x)=x f(Ax)$ rezultă:

$$A_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\cong\frac{1}{3}\left[g(1)+2g(\tfrac{1}{2})+2g(-\tfrac{1}{2})+g(-1)\right],$$

$$A_1\cong\frac{2}{3}\left[f(A)+f(\tfrac{A}{2})\right].$$

Pt. f univalentă $\Rightarrow S=0$ şi $N_I(A)=0$ se obține:

$$N(A)=N_R(A)=\frac{A_1}{A}\cong\frac{2}{3A}[f(A)+f(\tfrac{A}{2})].$$

Exemplul 1.2

Releul bipoz. (ideal): $v=b\ \mathrm{sgn}\ u$. $N(A)\cong(2b/3A)(1+1)=4b/3A$.

Aproximația este satisfăcătoare pt. $N(A)=4b/(\pi A)$. ■

O formulă de inversiune: se dă $N(A)$ şi se detetermină $f(u)$.

Amplitudinea lui u ia valorile $A, A/2, A/2^2, \ldots, A/2^n, \ldots$.

Cf. $N(A) \cong \frac{2}{3A}[f(A) + f(\frac{A}{2})]$, se scriu egalitățile:

$$\begin{aligned}
3AN(A)/2 &\cong f(A) + f(A/2) \\
-3AN(A/2)/2^2 &\cong -f(A/2) - f(A/2^2) \\
3AN(A/2^2)/2^3 &\cong f(A/2^2) + f(A/2^3) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(-1)^n 3AN(A/2^n)/2^{n+1} &\cong (-1)^n f(A/2^n) + (-1)^n f(A/2^{n+1}) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Se sumează!

$$f(A) \cong \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3A}{2^{n+1}} N\left(\frac{A}{2^n}\right), \qquad (1.21)$$

deoarece se reduc termeni şi pt. $n \to \infty$, $f(A/2^{n+1}) \to 0$.

(1.21) – foarte utilă în sinteza sistemelor automate neliniare.

c. Schema bloc structurală

Analogia dintre **răspunsul la frecvență** şi **funcția de descriere** permite tratarea SA neliniare similar cu cele liniare.

Pt. el. lin. se aplică identit. de transfig. a schemelor bloc struct., dar asfel ca intrările el. nelin. să rămână neschimbate.

Pt. SA cu o singură nelin. forma cea mai simplă este ***schema bloc structurală tipică***, fig.VII.7.

Se constituie el. lin. $G(s)$ imediat după cel neliniar, fiind posibilă verificarea ipotezei 4° de la punctul *a*.

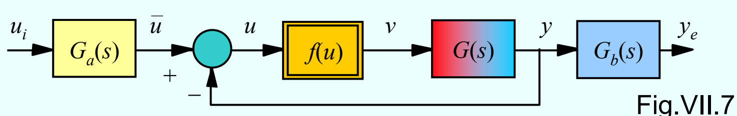
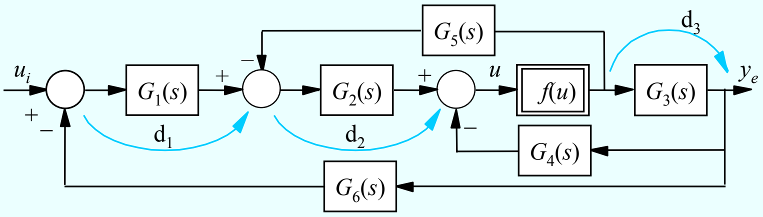


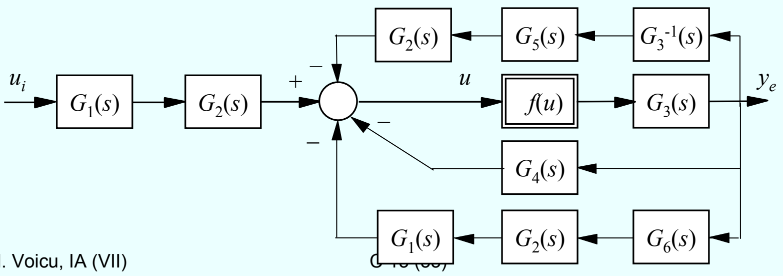
Fig.VII.7

Exemplul 1.5

Pt. schema din fig.VII.8 să se obțină sch. bloc struct. tipică.



Se realizează deplasările d_1, d_2 şi d_3 şi se ajunge la:



Se notează

$$G_7 = G_4 + G_2G_5 \,/\, G_3 + G_1G_2G_6$$

şi se ajunge la fig.VII.9

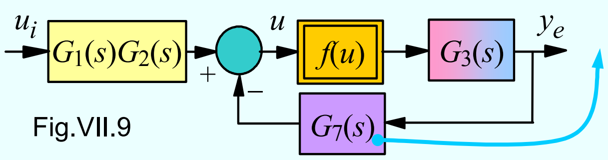


Fig.VII.9

Deplasând G_7 de pe c. de reacție pe c. directă, fig.VII.7,

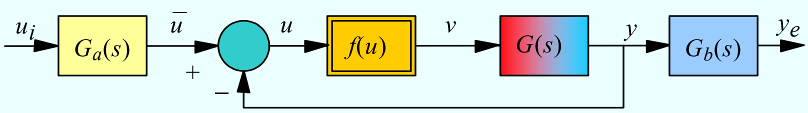


Fig.VII.7

în care

$$G_a = G_1G_2,\ \ G = G_2G_5 + G_3G_4 + G_1G_2G_3G_6 \ \text{ şi } \ G_b = G_7^{-1}. \ \blacksquare$$

d. Punct de echilibru

Conform fig.VII.7, se consideră SA neliniar:

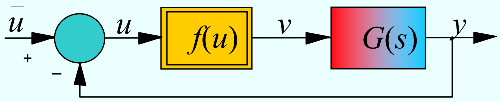


Fig.VII.7.a

descris de următoarele ecuații:

$$\begin{cases} Y(s) = G(s)V(s) \\ v = f(u) \\ u = \bar{u} - y. \end{cases}$$

Se admit următoarele ipoteze:

1° $G(s)$ are cel mult un pol pe axa imag., restul în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

2° Polinoamele din $G(s)$ sunt relativ prime.

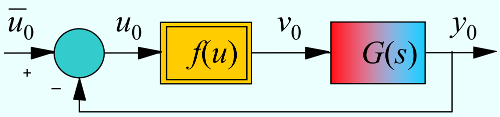
3° $G(s)$ conține, eventual, şi un element cu timp mort.

4° $f(u)$ satisface ipotezele admise la definiția f. de descriere.

Regimul staționar, cf. fig.VII.7.a, este posibil pentru:

$\bar{u} = \bar{u}_0 =$ const., ↳ $u = u_0 =$ const., $v = v_0 =$ const., $y = y_0 =$ const.

iar în fig.VII.7.a avem:



Cvadruplul $\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0$

defineşte un ***punct de funcționare*** conform ecuațiilor:

$$\boxed{\begin{cases} y_0 = G(p)v_0 \\ v_0 = f(u_0) \\ u_0 = \bar{u}_0 - y_0. \end{cases}} \qquad (1.22)$$

în care $p = d/dt$ este operatorul de derivare introdus prin înlocuirea formală a variabilei s în $G(s)$.

Pentru ***punctul de funcționare*** $\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0$ cu

$$y_0 = G(p)v_0, \qquad G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + ... + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_0}, \qquad (1.22.1) \quad (1.23)$$

are loc:
$$a_n p^n y_0 + a_{n-1}p^{n-1}y_0 + ... + a_0 y_0 =$$
$$= b_m p^m v_0 + b_{m-1}p^{m-1}v_0 + ... + b_0 v_0,$$

în care
$$\begin{cases} p^m v_0 = p^{m-1}v_0 = ... = pv_0 = 0 \\ p^n y_0 = p^{n-1}y_0 = ... = py_0 = 0. \end{cases} \qquad (1.24)$$

Prin urmare $\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0$ este un ***punct de echilibru***,
Cf. (1.24), toate vitezele sunt nule, ceea ce corespunde semnificației conceptului de echilibru cunoscut din fizică.

Totodată
$$a_0 y_0 = b_0 v_0.$$

Pentru ***punctul de echilibru*** **(PE)** $\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0$

din (1.22) - (1.24) rezultă :

$$\begin{cases} y_0 = (b_0/a_0)v_0, \ v_0 = f(u_0) \\ y_0 = \bar{u}_0 - u_0. \end{cases}$$

Se elimină v_0, şi se obține:

$$\begin{cases} y_0 = (b_0/a_0)f(u_0) \\ y_0 = \bar{u}_0 - u_0, \end{cases} \qquad (1.25)$$

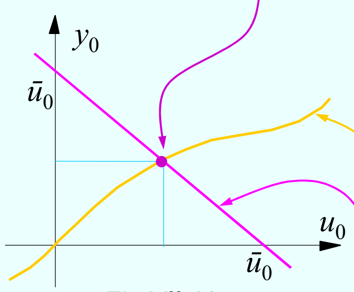


Fig.VII.10

graficele fiind date în fig.VII.10.

Pt. micile abateri $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ în jurul valorilor u_0, v_0, y_0, cf. (1.22):

$$\begin{cases} y_0 + \Delta y = G(p)(v_0 + \Delta v) \\ v_0 + \Delta v = f(u_0 + \Delta u) \qquad (1.26) \\ u_0 + \Delta u = \bar{u}_0 - (y_0 + \Delta y). \end{cases}$$

Se notează
$$\Delta f(\Delta u) = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0). \qquad (1.28)$$

$$(1.26)\quad \begin{cases} y_0+\Delta y = G(p)v_0 + G(p)\Delta v \\ v_0+\Delta v = f(u_0+\Delta u) - f(u_0) \\ u_0+\Delta u = \bar{u}_0 - y_0 - \Delta y. \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = G(p)v_0 \\ v_0 = f(u_0) \\ u_0 = \bar{u}_0 - y_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\Delta f(\Delta u) = f(u_0+\Delta u) - f(u_0). \qquad (1.28)$$

Cf (1.22), (1.28), din (1.26) rezultă:

$$\begin{cases} \Delta y = G(p)\Delta v \\ \Delta v = \Delta f(\Delta u) \\ \Delta u = -\Delta y. \end{cases} \qquad (1.27)$$

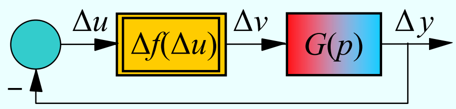


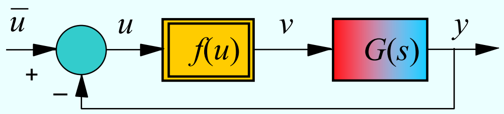
Fig.VII.11

Fig.VII.11 -***schema bloc structurală standard*** pentru PE:

$$(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0).$$

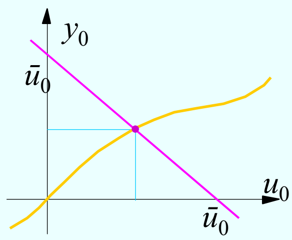
SAN tipic (fig.VII.7.a) ⇧ SAN standard (fig.VII.11)

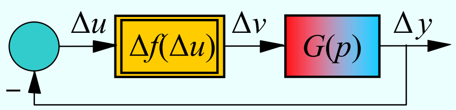
$$\begin{cases} Y(s) = G(s)V(s) \\ v = f(u) \\ u = \bar{u} - y. \end{cases}$$



Din ***schema bloc structurală tipică***, Fig.VII.7.a,

pt. PE: $\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0$
$$\begin{cases} y_0 = G(p)v_0 \\ v_0 = f(u_0) \\ u_0 = \bar{u}_0 - y_0. \end{cases}$$





$$\begin{cases} \Delta y = G(p)\Delta v \\ \Delta v = \Delta f(\Delta u) \\ \Delta u = -\Delta y. \end{cases}$$

rezultă ***schema bloc structurală standard***, Fig.VII.11,

cu PE: $\Delta y = 0,\ \Delta v = 0,\ \Delta u = 0.$

e. Ecuația balanței armonice

SAN standard cf. fig. VII.11,

descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} \Delta y = G(p)\Delta v \\ \Delta v = \Delta f(\Delta u) \\ \Delta u = -\Delta y. \end{cases} \qquad (1.27)$$

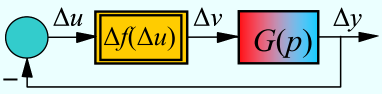


Fig.VII.11

pentru $\bar{u}_0$ fixat, are PE unic $\Delta y = \Delta v = \Delta u = 0.$

(1.27) poate avea soluții periodice (oscil. întrețin.) în jurul PE.

Dacă există oscil. întrețin., atunci, datorită lui $G(s)$ (FTJ),

la intrarea el. neliniar preponderentă este fundamentala:

$$\Delta u_1(t) = A\sin\omega t,\ \ t \in \mathbf{R};\ \ A > 0,\ \ \omega > 0. \qquad (1.29)$$

În complex, pe fundamentale, se scriu relațiile:

$\Delta u_1(t) = \mathrm{Im}\,\Delta U_1(A, j\omega),\ \Delta v_1(t) = \mathrm{Im}\,\Delta V_1(A, j\omega),\ \Delta y_1(t) = \mathrm{Im}\,\Delta Y_1(A, j\omega).$

Se trec în complex, pe fundamentale, ec. SAN standard:

$$\begin{cases} \Delta y = G(p)\Delta v \\ \Delta v = \Delta f(\Delta u) \\ \Delta u = -\Delta y. \end{cases} \qquad (1.27)$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \Delta Y_1(A, j\omega) &= G(j\omega)\Delta V_1(A, j\omega) \\ \Delta V_1(A, j\omega) &= N(A)\Delta U_1(A, j\omega) \qquad (1.30) \\ \Delta U_1(A, j\omega) &= -\Delta Y_1(A, j\omega), \end{aligned}$$

în care $G(j\omega)$ este răspunsul la frecvență al el. liniar $G(p)$

şi $N(A)$ este funcția de descriere a neliniarității $\Delta v = \Delta f(\Delta u).$

Din ecuațiile

$$\Delta Y_1(A, j\omega) = G(j\omega)\Delta V_1(A, j\omega)$$

$$\Delta V_1(A, j\omega) = N(A)\Delta U_1(A, j\omega) \qquad (1.30)$$

$$\Delta U_1(A, j\omega) = -\Delta Y_1(A, j\omega).$$

se elimină $\Delta V_1(A, j\omega)$ şi $\Delta Y_1(A, j\omega)$ şi se obține:

$$[N(A)G(j\omega)+1]\Delta U_1(A, j\omega) = 0. \qquad (1.31)$$

Întrucât $U_1(A, j\omega) = Ae^{j\omega t} \neq 0,$ din (1.31) rezultă:

$$\boxed{N(A)G(j\omega)+1=0,\ A>0,\ \omega>0.} \qquad (1.32)$$

(1.32) este ***ecuația caracteristică*** (analog cu cazul liniar) a SAN standard, numită şi ***ecuația balanței armonice***.

$$N(A)G(j\omega)+1=0,\ A>0,\ \omega>0. \qquad (1.32)$$

Regula 1

Dacă în SAN standard există oscilații întreținute, aproximate prin fundamentale, atunci amplitudinea A şi pulsația ω din $\Delta u_1(t) = A\sin\omega t$ satisfac ecuația balanței armonice (1.32). ■

Ec. complexă (1.32) este echivalentă cu fiecare din ecuațiile:

$$N(A) = -G^{-1}(j\omega),\ A>0,\ \omega>0,$$

$$N_R(A)+jN_I(A) = -\mathrm{Re}\,G^{-1}(j\omega) - j\,\mathrm{Im}\,G^{-1}(j\omega),\ A>0,\ \omega>0.$$

Ecuația complexă (1.32) este echivalentă cu ecuațiile reale:

$$\begin{cases} N_R(A) = -\mathrm{Re}\,G^{-1}(j\omega) \\ N_I(A) = -\mathrm{Im}\,G^{-1}(j\omega). \end{cases} \qquad (1.33)$$

Pentru neliniaritățile univalente $N_I(A)\equiv 0$; (1.33) devine:

$$\begin{cases} N(A) = -\mathrm{Re}\,G^{-1}(j\omega) \\ \mathrm{Im}G^{-1}(j\omega) = 0 \qquad (\,\mathrm{Im}G(j\omega) = 0). \end{cases} \tag{1.34}$$

Dacă $N(A)$, $G(j\omega)$ au forme complicate, pt. rezolv. ec. (1.32) se utilizează şi procedee grafice. (1.32) se scrie sub forma:

$$G(j\omega) = N_i(A), \tag{1.35}$$

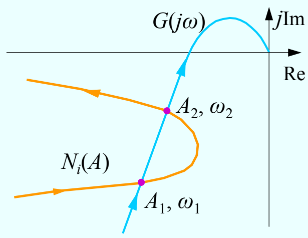


Fig.VII.12

$N_i(A)$ fiind funcț de descr. inv. neg.

Procedeul celor două locuri

Se trasează $G(j\omega), \omega\geq 0$, şi $N_i(A), A\geq 0$.

În fig.VII.12,intersecțiile corespund oscilațiilor întreținute din SAN.

Exemplul 1.6

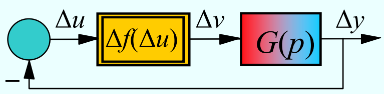


Fig.VII.11

Se consideră SAN cf. fig.VII.11 cu releu bipozițional ideal:

$$\Delta f(\Delta u) = b\,\mathrm{sgn}\Delta u, \quad \mathrm{sgn}\ 0 = 0,$$

şi partea liniară

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}, \quad a_{1,2} > 0, a_3 \geq 0.$$

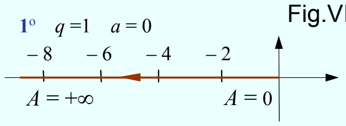
Să se studieze oscilațiile întreținute (dacă există).

SAN are punctul de echilibru: $\Delta y = \Delta v = \Delta u = 0$.

$N(A)$ la ex. 1.1 (1°) şi $N_i(A)$ cf. fig.VII.6 (1°):

$$1^\circ\ N(A) = \frac{4b}{\pi A},\ N_i(A) = -\frac{\pi A}{4b},\ A > 0.$$

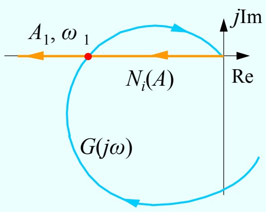
Fig.VII.6



Cu procedeul celor două locuri – fig.VII.13,

↙ există o singură osc. întreținută cf. cu

Fig.VII.13



$$\begin{cases} N(A) = -\mathrm{Re}\,G^{-1}(j\omega) \\ \mathrm{Im}\,G^{-1}(j\omega) = 0. \end{cases} \qquad (1.34)$$

rezultă

$$\begin{cases} 4b/(\pi A) = -\mathrm{Re}(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3) \\ \mathrm{Im}(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3) = 0, \end{cases}$$

$\omega_1 = \sqrt{a_2}$, $A_1 = 4b/[\pi(a_1a_2 - a_3)]$; din $A_1 > 0 \Rightarrow a_1a_2 - a_3 > 0$.

Daca $a_3 > 0$, atunci este necesar ca $G(s)$ să fie BIBO-stabilă:

cf. c. Hurwitz $a_1a_2 - a_3 > 0$.

Oscil. într.: $\Delta u_1(t) = 4b/[\pi(a_1a_2 - a_3)]\sin\sqrt{a_2}\, t$. ■

1.2. Stabilitatea oscilațiilor întreținute

Oscilațiile întreținute pot fi: ***stabile***, ***instabile*** **şi** ***semistabile***.

Natura osc. întreț. şi cea a PE $\Delta y = \Delta v = \Delta u = 0$ sunt corelate.

a. Oscilații limită

Se admite că în SA nelin. (fig.VII.11) există osc. întreț. şi că are loc perturbarea (↑↓), de scurtă durată, a amplit.

Cf. evoluției în timp, după perturbare, se disting trei cazuri.

Definiția 2

Osc. întreținută se numeşte ***limită stabilă*** dacă după perturbarea amplit. (suf. de mică ↑↓), de scurtă durată, urmează revenirea, în timp, la osc. întreținută precedentă.■

Definiția 3

Osc. întreținută se numeşte ***limită instabilă*** dacă după Perturb. amplit. (oricât de mică ↑↓), de scurtă durată, urmează îndepărtarea, în timp, de osc. întrețin. precedentă.■

Definiția 4

Osc. întreinută se numeşte ***limită semistabilă***

[*stabilă / instabilă la stânga* şi *instabilă / stabilă la dreapta*], dacă după perturb. amplit., în sensul scăderii suf./oricât de mici şi al creşterii oricât/suf. de mici, de scurtă durată, urmează rev./îndep. şi îndep./rev. la/de şi de/la osc. întreținută precedentă.■

b. Regula lui Loeb

O oscilație întreținută

$$u_1(t) = A_0 \sin \omega_0 t\,, \quad A_0 > 0,\ \omega_0 > 0\,,$$

oricare ar fi natura ei, este sol. a ec. balanței armonice

$$N(A_0)G(j\omega_0) + 1 = 0.$$

O perturbare a ei, la $t = 0$, are ca efect variațiile

$$A_0 \to A_0 + \Delta A\,, \qquad \omega_0 \to \omega_0 + \Delta\omega,$$

$$u_1(t) \to u_1(t) + \Delta u_1(t) = (A_0 + \Delta A)\, e^{-\zeta t} \sin(\omega_0 + \Delta\omega)t$$

cu amortizarea ζ, variabilă , pozitivă sau negativă, după caz.

Osc. întreținută este limită stabilă dacă: $\boxed{\Delta A \zeta > 0}$

şi este limită instabilă dacă: $\boxed{\Delta A \zeta < 0.}$

Se notează:

$$N_{iR}(A) = \mathrm{Re}\ N_i(A),\ N_{iI}(A) = \mathrm{Im}\ N_i(A),$$

$$G_R(\omega) = \mathrm{Re}\, G(j\omega),\ G_I(\omega) = \mathrm{Im}\, G(j\omega).$$

$$\boxed{S_0 = \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0}\left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0} - \left(\frac{dG_I}{d\omega}\right)_{\omega_0}\left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0}.}$$

Regula 2 (Loeb)

Osc. întreţinută caracterizată de $(A_0,\ \omega_0)$, soluţie a ecuaţiei:

$$N(A_0)G(j\omega_0) + 1 = 0,$$

este:
- limită stabilă dacă $S_0 > 0$;
- limită instabilă dacă $S_0 < 0$;
- limită semistabilă dacă $S_0 = 0$. ■

Pt. evitarea calculelor pentru S_0 se definesc vectorii:

$$\bar{v}_G = \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0}\bar{i} + \left(\frac{dG_I}{d\omega}\right)_{\omega_0}\bar{j},\quad \bar{v}_N = \left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0}\bar{i} + \left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0}\bar{j},$$

tangenţi respectiv la hodogr. $G(j\omega)$ şi $N_i(A)$ în p. de intersecţie.

Produsul lor vectorial este:

$$\bar{v}_G \times \bar{v}_N = $$

$$= |\bar{v}_G|\cdot|\bar{v}_N|\sin(\bar{v}_G, \bar{v}_N)\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0} & \left(\frac{dG_R}{d\omega}\right)_{\omega_0} & 0 \\ \left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0} & \left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0} & 0 \end{vmatrix} = S_0\bar{k}.$$

$(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – versorii sp. tridim.)

Sensul poz. al vect. produs se obţine atunci când unghiul dintre $\bar{v}_G, \bar{v}_N$, în sens pozitiv, este între 0 şi π.

Regula 3 (Loeb)

Osc. întreținută (A_0, ω_0), soluție a ecuației (1.32), este:

- ***limită stabilă*** dacă pornind din p. de intersecție pe $G(j\omega)$ pt. $\omega\uparrow$, $N_i(A)$ pt. $A\uparrow$ rămâne la stânga – fig.VII.16.a;
- ***limită instabilă*** dacă pornind din p. de intersecție pe $G(j\omega)$ pt. $\omega\uparrow$, $N_i(A)$ pt. $A\uparrow$ rămâne la dreapta – fig.VII.16.b;
- ***limită semistabilă*** dacă $G(j\omega)$, $N_i(A)$ sunt tang.– fig.VII.16.c.■

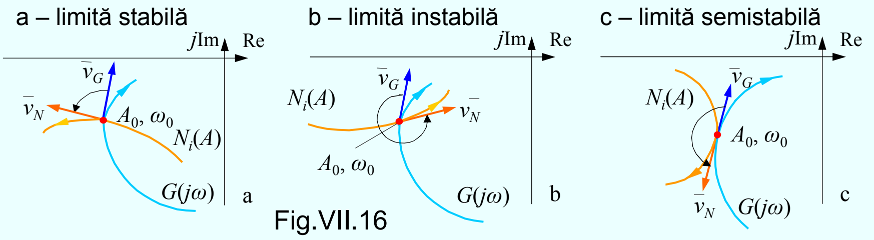


Fig.VII.16