Teorema 3 (transformarea Hilbert)

O condiţie nec. şi suf. ca $G(j\mu)=R(\mu)+jI(\mu)$, de pătrat integr., să fie răsp. la frecv. al unui sist. din. lin. realist este ca:

$$I(\mu)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(¦)}{\mu-¦}d¦,\qquad R(\mu)=+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I(¦)}{\mu-¦}d¦.$$

$\mathscr{D}$. *Necesitatea*. $g(t)\equiv 0, t<0, \quad \Rightarrow \quad g(t)=g(t)±(t).$

Se aplică transf. Fourier:

$$G(j\mu)=\frac{1}{2\pi}G(j\mu)*\overbrace{\left(\frac{1}{j\mu}+\pi¢(\mu)\right)}^{\mathscr{F}\{±(t)\}},\quad G(j\mu)=\frac{1}{2\pi}G(j\mu)*\frac{1}{j\mu}+\frac{1}{2}\overbrace{G(j\mu)*¢(\mu)}^{G(j\mu)},$$

$$G(j\mu)=\frac{1}{j\pi}G(j\mu)*\frac{1}{\mu},\quad R(\mu)+jI(\mu)=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(¦)+jI(¦)}{\mu-¦}d¦.$$

$$R(\mu)=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{jI(¦)}{\mu-¦}d¦,\qquad jI(\mu)=\frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(¦)}{\mu-¦}d¦.$$

Suficienţa. Utilizând de ex. $R(\mu)=+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{I(¦)}{\mu-¦}d¦$

se scrie: $$R(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}jI(¦)\frac{2}{j(\mu-¦)}d¦=jI(\mu)*\frac{2}{j\mu}. \qquad (3.45)$$

Cu $\frac{2}{j\mu}=\mathscr{F}\{\mathrm{sgn}\,t\}$, din (3.45) rezultă:

$$g_p(t)=g_i(t)\,\mathrm{sgn}\,t,$$

$$g(t)=g_i(t)+g_p(t)=g_i(t)+g_i(t)\,\mathrm{sgn}\,t.$$

$$g(t)=\begin{cases} g_i(t)-g_i(t)=0, & t<0,\\ g_i(t)+g_i(t)\equiv 2g_i(t), & t>0.\end{cases}$$

↪ Sistemul dinamic liniar este realist. ■

Exemplul 3.6

Să se arate că următoarea funcţie de transfer satisface teorema 3.

$$G(s)=\frac{1}{s+1}.$$

Pentru $s=j\mu$ rezultă

$R(\text{¦})$

$$R(\mu)=\frac{1}{\mu^2+1},\quad I(\mu)=-\frac{\mu}{\mu^2+1},$$

$$I(\mu)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{\frac{1}{(\text{¦}^2+1)}}\frac{1}{(\mu-\text{¦})}d\text{¦}=-\frac{1}{\text{®}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mu^2+1}\left(\frac{\text{¦}+\mu}{\text{¦}^2+1}+\frac{1}{\mu-\text{¦}}\right)d\text{¦}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\mu^2+1}\lim_{\sim\to+\infty}\left[\int_{-\sim}^{+\sim}\frac{\text{¦}+\mu}{\text{¦}^2+1}d\text{¦}+\lim_{\pounds\to0}\left(\int_{-\sim}^{\mu-\pounds}\frac{1}{\mu-\text{¦}}d\text{¦}+\int_{\mu+\pounds}^{+\sim}\frac{1}{\mu-\text{¦}}d\text{¦}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\mu^2+1}\lim_{\sim\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(\text{¦}^2+1)\Big|_{-\sim}^{+\sim}+\mu\,\mathrm{arctg}\,\text{¦}\Big|_{-\sim}^{+\sim}-\right.$$

$$\left.-\lim_{\pounds\downarrow0}\left(\ln|\mu-\text{¦}|\Big|_{-\sim}^{+\mu-\pounds}+\ln|\mu-\text{¦}|\Big|_{\mu+\pounds}^{\sim}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\mu^2+1}\lim_{\sim\to+\infty}\left[\cancel{\frac{1}{2}\ln(\sim^2}+1)-\cancel{\frac{1}{2}\ln(\sim^2}+1)+2\mu\,\mathrm{arctg}\sim-\right.$$

$$\left.-\lim_{\pounds\downarrow0}(\cancel{\ln\pounds}-\ln|\mu+\sim|+\ln|\mu-\sim|-\cancel{\ln\pounds})\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\mu^2+1}\lim_{\sim\to+\infty}\left(2\mu\,\mathrm{arctg}\sim+\ln\left|\frac{\mu+\sim}{\mu-\sim}\right|\right)=-\frac{\mu}{\mu^2+1}=I(\mu).\ \blacksquare$$

Teorema 4 (suportul obs. 1.3 de la II.1.4)

$G(s)$ – olomorfă în $\{\mathrm{Re}\, s \geq 0\}$; $G(j\mu)$, $\mu \in \mathbf{R}$, – abs. integr.; şi

$$|G(s)| \leq \frac{M}{|s|}, \mathrm{Re}\, s \geq 0, \qquad (M > 0);$$

atunci $G(j\mu)$ este răsp. la frecv. al unui sist. din. liniar realist.

$\mathcal{D}$. Există $\quad g(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\mu) e^{j\mu t} d\mu. \quad$ (3.47)

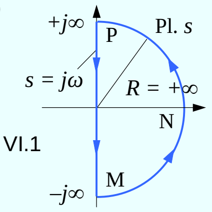


Fig. VI.1

Pentru fig.VI.1, cf. t. reziduurilor:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{M\widehat{N}PM} G(s) e^{st} ds = 0, \ t < 0,$$

Pt. $R \to +\infty$, $= 0$. $\qquad = -g(t)$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi j} \int_{M\widehat{N}P} G(s) e^{st} ds}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi \cancel{j}} \int_{\infty}^{-\infty} G(j\mu) e^{j\mu t} d(\cancel{j}\mu)}_{=-g(t)} = 0, \ t < 0. \quad (3.48)$$

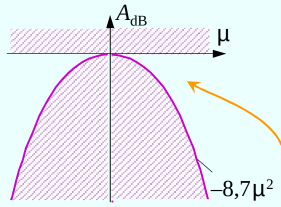
Din (3.47) şi (3.48) ⇨ $g(t) = 0, \ t < 0$. ■

Teorema 5 (Paley - Wiener)

O condiţie nec. şi suf. ca $M(\mu) > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$, de pătrat integr., să fie modulul răsp. la frecv. al unui sist. din. lin. realist este:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln M(\mu)|}{1+\mu^2} d\mu < +\infty. \ ■ \quad (3.49)$$

Fig.VI.27



Exemplul 3.7

FTJ cu $M(0) = 1$, $0 < M(\mu) < 1$, $\mu \neq 0$,

şi $\lim_{\mu \to \pm\infty} M(\mu) = 0$.

Caz limită: "clopotul lui Gauss":

cf. (3.49): $\quad M(\mu) = e^{-\mu^2}$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2}{1+\mu^2} d\mu$ este divergentă. Este necesar ca: $|\ln M(\mu)| < \mu^2$.

Cu $A_{\mathrm{dB}}(\mu) = 20 \lg M(\mu)$ rezultă: $\quad -8{,}7\mu^2 < A_{\mathrm{dB}}(\mu) < 0$. ■

3.3. Sisteme de defazaj minim

Când există o relaţie şi între $M(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$?

Fie un sistem cu răspunsul la frecvenţă $G(j\omega)$ şi un altul cu :

$$G_l(j\omega) = \ln G(j\omega) = \ln M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \ln M(\omega) + j\varphi(\omega). \quad (3.50)$$

Cu $A(\omega) = \ln M(\omega)$, cf. transformării Hilbert:

Condiţiile Bode

$$\boxed{\varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A(\nu)}{\omega-\nu}d\nu,} \quad \boxed{A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\nu)}{\omega-\nu}d\nu.} \quad (3.51) \; (3.52)$$

Fie $G(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)}$, cu $Q(s)$, $P(s)$ prime. Cf. (3.50) se scrie:

$$G_l(s) = \ln Q(s) - \ln P(s).$$

Zerourile lui Q şi ale lui P sunt poli pt. $\ln Q$ şi respectiv $\ln P$.

(3.51-52) au loc numai dacă Q şi P au zerourile în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

Condiţiile Bode

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A(\nu)}{\omega-\nu}d\nu, \quad A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\nu)}{\omega-\nu}d\nu. \quad (3.51) \; (3.52)$$

Definiţia 9

Sistemele din. liniare cu toţi polii şi zerourile în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$ se numesc sist. de ***defazaj minim*** (SDM).

Sistemele cu toţi polii şi o parte din zerouri în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$ se numesc sist. de ***defazaj neminim*** (SDNM).■

Defazajul introdus de $G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ se defineşte prin:

$$\Delta\varphi(\omega) = \varphi_{intrare} - \varphi_{iesire} = \varphi_{intrare} - \left(\varphi_{intrare} + \varphi(\omega)\right) = -\varphi(\omega).$$

În mulţ. s. realiste cu acelaşi $M(\mu)$, SDM are defazajul minim.

SDM satisfac (3.51), (3.52) – condiţiile lui Bode.

Exemplul 3.8

Fie SDM: $G_m(s) = \dfrac{bs+1}{(a_1 s+1)(a_2 s+1)}$ cu a_1, a_2, $b > 0$, şi

SDNM: $G_{nm}(s) = \dfrac{bs-1}{(a_1 s+1)(a_2 s+1)}$. Să se compare defazajele.

Avem $G_m(j\mu) = \dfrac{1+jb\mu}{(1+ja_1\mu)(1+ja_2\mu)}$, $G_{nm}(j\mu) = \dfrac{-1+jb\mu}{(1+ja_1\mu)(1+ja_2\mu)}$.

Modulele satisfac: $M_m(\mu) = M_{nm}(\mu) = \sqrt{\dfrac{1+(b\mu)^2}{[1+(a_1\mu)^2][1+(a_2\mu)^2]}}$.

Fazele sunt: $\varphi_m(\mu) = \mathrm{arctg}\, b\omega - \mathrm{arctg}\, a_1\mu - \mathrm{arctg}\, a_2\mu,$

$\varphi_{nm}(\mu) = -\mathrm{arctg}\, b\mu - \mathrm{arctg}\, a_1\mu - \mathrm{arctg}\, a_2\mu.$

Defazajele: $\psi_m(\mu) = -\varphi_m(\mu) = -\mathrm{arctg}\, b\omega + \mathrm{arctg}\, a_1\mu + \mathrm{arctg}\, a_2\mu,$

$\psi_{nm}(\mu) = -\varphi_{nm}(\mu) = \mathrm{arctg}\, b\mu + \mathrm{arctg}\, a_1\mu + \mathrm{arctg}\, a_2\mu.$

Evident: $\psi_m(\mu) < \psi_{nm}(\mu)$. ■

Exemplul 3.9

Pt. SDNM $G(s) = \dfrac{k(1-T_1 s)}{1+Ts}$

esenţialul apare în $h(t)$:

$h(+0)$ şi $h(+\infty)$ sunt de semne opuse.

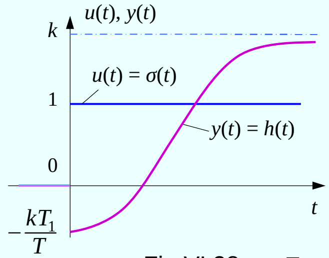


Fig.VI.28 ■

Structura SDNM:

$$G(s)=\frac{Q_1(s)Q_2(s)}{P(s)}\times\frac{Q_2(-s)}{Q_2(-s)}=\frac{Q_1(s)Q_2(-s)}{P(s)}\times\frac{Q_2(s)}{Q_2(-s)}; \quad (3.53)$$

$P(s)$, $Q_1(s)$ au zerourile $\{\mathrm{Re}s<0\}$, iar $Q_2(s)$ în $\{\mathrm{Re}s>0\}$;

$Q_2(-s)$ are zerourile $\{\mathrm{Re}s<0\}$.

Multiplic (3.53) cu $\times\dfrac{Q_2(-s)}{Q_2(-s)}$ ⇨ $G(s)=G_m(s)\times G_t(s)$, (3.54)

cu: $G_m(s)=\dfrac{Q_1(s)Q_2(-s)}{P(s)}$ – SDM, $G_t(s)=\dfrac{Q_2(s)}{Q_2(-s)}$ ***filtru ideal «trece-tot» (FITT)***

$$|G_t(j\mu)|=\frac{|Q_2(j\mu)|}{|Q_2(-j\mu)|}=1, \qquad |G(j\mu)|=|G_m(j\mu)||G_t(j\mu)|=|G_m(j\mu)|.$$

Sist. cu acelaşi $M(\mu)$ se disting numai prin FITT, cf. (3.54).

4. Stabilitatea şi stabilizarea sistemelor automate

4.1. Principiul argumentului

a. Integrala pe contur a derivatei logaritmice

Fie $G(s)=\dfrac{Q(s)}{P(s)}$, $s\in\mathbf{C}$, funcţia de transfer a unui sist. din. liniar;

$P(s)$, $Q(s)$ – relativ prime şi grad $Q(s)=m$, grad $P(s)=n$.

Ipoteza 1. Fie ¥ un contur închis, în pl. $\mathbf{C}$, în interiorul căruia $G(s)$ are $m_{¥}$ zerouri şi $n_{¥}$ poli (incl. multipl.).■

Teorema 1 (Cauchy)

În ipoteza 1, $G(s)$ satisface: $\displaystyle\int_{¥}\frac{G'(s)}{G(s)}ds=2®j(m_{¥}-n_{¥}).$ (4.2)

$\mathscr{D}$. Fie z_i, de multipl. $m_i, i=\overline{1,«}$, zerourile lui $G(s)$ în interiorul lui ¥, şi p_k, de multipl. n_k, $k=\overline{1,¬}$, polii lui $G(s)$ din lui ¥.

Au loc: $\sum_1^{«} m_i = m_{¥}$, $\sum_1^{¬} n_k = n_{¥}$.

Pentru $\frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{d}{ds}\ln G(s)$ z_i şi p_k sunt poli simpli.

Cf. t. rezid.: $\int_{¥} \frac{G'(s)}{G(s)} ds = 2® j\left[\sum_1^{«} \mathrm{Re}\,z_{¥}(z_i)+\sum_1^{¬} \mathrm{Re}\,z_{¥}(p_k)\right].$

Pt. z_i se scrie: $G(s)=(s-z_i)^{m_i}G_i(s)$ (z_i nu este zero pt. $G_i(s)$).

$$\hookrightarrow \quad \frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{m_i(s-z_i)^{m_i-1}G_i(s)+(s-z_i)^{m_i}G_i'(s)}{(s-z_i)^{m_i}G_i(s)} = \frac{m_i}{s-z_i}+\frac{G_i'(s)}{G_i(s)}.$$

Ca urmare: $\mathrm{Re}\,z_{¥}(z_i)=m_i.$

$$\sum_1^{«} \mathrm{Re}z_{¥}(z_i)=\sum_1^{«} m_i = m_{¥}. \qquad (4.4)$$

Pt. p_k se scrie: $G(s)=(s-p_k)^{-n_k}G_k(s)$ (p_k nu este pol pt. $G_k(s)$).

$$\hookrightarrow \quad \frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{-n_k(s-p_k)^{-n_k-1}G_k(s)+(s-p_k)^{-n_k}G_k'(s)}{(s-p_k)^{-n_k}G_k(s)} = -\frac{n_k}{s-p_k}+\frac{G_k'(s)}{G_k(s)}.$$

Ca urmare: $\mathrm{Re}z_{¥}(p_k)=-n_k.$

$$\sum_1^{¬} \mathrm{Re}z_{¥}(p_k)=-\sum_1^{¬} n_k = -n_{¥}. \qquad (4.5)$$

Înlocuind (4.4) şi (4.5) în (4.3) se obţine (4.2).■

Ipoteza 2. În plus $G(s)$ are $\tilde{m}_{¥}$ zerouri şi $\tilde{n}_{¥}$ poli (inclusiv multiplicităţile) pe conturul ¥ (cu tangenta continuă).■

Teorema 2 (Cauchy)

$G(s)$, cf. ipotezelor 1 şi 2, satisface relaţia:

$$\int_{¥} \frac{G'(s)}{G(s)} ds = 2®j(m_{¥}-n_{¥})+®j(\tilde{m}_{¥}-\tilde{n}_{¥}).\,■ \qquad (4.6)$$

b. Variaţia totală a argumentului

Folosind (4.6) se obţin:

$$\oint_{\Gamma}\underbrace{\frac{G'(s)}{G(s)}}_{\frac{d}{ds}[\ln G(s)]}ds = 2\pi\, j(m_{\Gamma}-n_{\Gamma})+\pi\, j(\tilde m_{\Gamma}-\tilde n_{\Gamma}), \qquad (4.6)$$

$$[\ln G(s)]_{s\in\Gamma} = 2\pi\, j(m_{\Gamma}-n_{\Gamma})+\pi\, j(\tilde m_{\Gamma}-\tilde n_{\Gamma}). \qquad (4.7)$$

Înlocuind $G(s) = |G(s)|e^{\,j\arg G(s)}$ în (4.7), rezultă:

$$[\ln G(s)]_{s\in\Gamma}=\underbrace{[\ln|G(s)|]_{s\in\Gamma}}_{=0}+j[\arg G(s)]_{s\in\Gamma}=2\pi\, j(m_{\Gamma}-n_{\Gamma})+\pi\, j(\tilde m_{\Gamma}-\tilde n_{\Gamma}),$$

din care se obţine ***principiul argumentului*** :

$$[\arg G(s)]_{s\in\Gamma} = 2\pi(m_{\Gamma}-n_{\Gamma})+\pi(\tilde m_{\Gamma}-\tilde n_{\Gamma}). \qquad (4.8)$$

Se aplică ***principiul argumentului***,

$$[\arg G(s)]_{s\in\Gamma} = 2\pi(m_{\Gamma}-n_{\Gamma})+\pi(\tilde m_{\Gamma}-\tilde n_{\Gamma}),$$

pentru ***conturul Nyquist*** Γ_N – fig.VI.1:

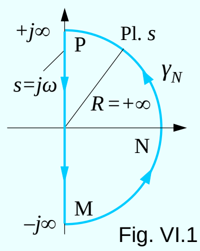


Fig. VI.1

$$[\arg G(s)]_{s\in\Gamma_N} = 2\pi(m_{\Gamma_N}-n_{\Gamma_N})+\pi(\tilde m_{\Gamma_N}-\tilde n_{\Gamma_N}).$$

Întrucât $\arg G(-j\omega) = -\arg G(j\omega)$ şi

$$[\arg G(s)]_{s\in\Gamma_N} = \arg G(j\omega)\Big|_{+\infty}^{-\infty} = -\arg G(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

rezultă că pe ***axa imaginară***, $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$, pentru ω crescător:

$$\arg G(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -2\pi(m_{\Gamma_N}-n_{\Gamma_N})-\pi(\tilde m_{\Gamma_N}-\tilde n_{\Gamma_N}),$$

respectiv

$$\boxed{\arg G(j\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi(n_{\Gamma_N}-m_{\Gamma_N})+\pi(\tilde n_{\Gamma_N}-\tilde m_{\Gamma_N}).}$$

Fie m_0 şi n_0 nr. zerouri finite şi poli finiţi în $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$.

Pentru $G(s)$ punctul de la *infinit*, situat pe ¥_N , este:

fie un zero (pt. $m<n$), fie un pol (pt. $m>n$) de multipl. $|m-n|$.

Pe $\text{¥}_N \hookrightarrow$: $\quad \tilde{m}_{\text{¥}_N} - \tilde{n}_{\text{¥}_N} = m_0 - n_0 - (m-n).$

Fie $m_{\text{¥}_N} = m_+$ şi $n_{\text{¥}_N} = n_+$ nr. zerouri şi poli în $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$.

Din $\quad \arg G(j\mu)\big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\text{®}\,(n_{\text{¥}_N} - m_{\text{¥}_N}) + \text{®}\,(\tilde{n}_{\text{¥}_N} - \tilde{m}_{\text{¥}_N}).$

se obţine ***variaţia totală a argumentului***

$$\boxed{\arg G(j\mu)\big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\text{®}(n_+ - m_+) + \text{®}(n_0 - m_0) + \text{®}(m-n).} \quad (4.9)$$

Întrucât $\quad G(-j\mu) = \bar{G}(j\mu), \arg G(j\mu)\big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\arg G(j\mu)\big|_0^{+\infty},$

din (4.9) $\hookrightarrow$
$$\arg G(j\mu)\big|_0^{+\infty} = \text{®}(n_+ - m_+) + \frac{\text{®}}{2}(n_0 - m_0) + \frac{\text{®}}{2}(m-n). \quad (4.10)$$

c. Criteriul Cremer-Leonhard

Fie $\Delta(s)$ – polinom monic, cu coeficienţi reali şi $\mathrm{grad}\Delta(s) = r$.

Teorema 3 (Cremer-Leonhard)

a(s) este *hurwitzian* ę $\quad \arg \Delta(j\mu)\big|_0^{+\infty} = \frac{\text{®}}{2} r. \quad$ (4.11)

***D*. Fie r_+, r_0 nr. zerouri (cu multipl.) în $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$, $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$.**

Din (4.10), pentru $G(s)=\Delta(s), n_+=0, n_0=0, n=0, m_+=r_+, m_0=r_0, m = r,$

$$\arg G(j\mu)\big|_0^{+\infty} = \text{®}(n_+ - m_+) + \frac{\text{®}}{2}(n_0 - m_0) + \frac{\text{®}}{2}(m-n), \quad (4.10)$$

$$\hookrightarrow \arg \Delta(j\mu)\big|_0^{+\infty} = -\text{®}\, r_+ - \frac{\text{®}}{2} r_0 + \frac{\text{®}}{2} r. \quad (4.12)$$

Suf. Din (4.11), (4.12): $r_+ = 0$, $r_0 = 0$; $\Delta(s)$ – hurwitzian.

Nec. $\Delta(s)$ – hurwitzian: $r_+ = 0$, $r_0 = 0$. Din (4.12) rezultă (4.11).■

Din condiţia nec. şi suf. $\arg \Delta(j\mu)\Big|_0^{+\infty} = \frac{®}{2} r$ este echivalentă cu:

Teorema 4 (Cremer-Leonhard)

$\Delta(s)$ este *hurwitzian* dacă şi numai dacă hodograful $\Delta(j\mu)$, $\mu \geq 0$, parcurge în sens pozitiv exact r cadrane în succesiunea lor naturală. ■

Exemplul 4.1

Fie polinomul

a$(s) = s^3+17s^2+2s+1$.

Se trasează hodograful $\Delta(j\mu)$, $\mu \geq 0$, fig.VI.29.

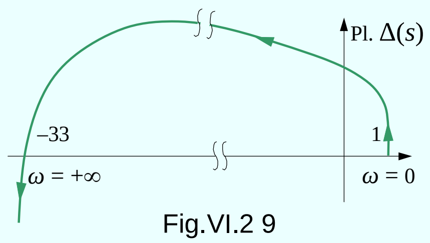


Fig.VI.2 9

Conform fig.VI.29, $\Delta(s)$ este hurwitzian. ■

4.2. Criteriul Nyquist

a. Utilizarea locului de transfer

Fie sistemul automat cf. fig.VI.30 (coresp. fig.V.1), cu

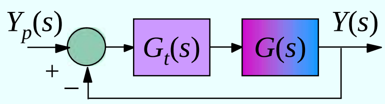


Fig.VI.30

$$G_d(s) = G(s)G_t(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad G_0(s) = \frac{G_d(s)}{1+G_d(s)} = \frac{G_d(s)}{F(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)+Q(s)}. \qquad (4.13)\ (4.14)$$

$G_d(s)$ – *sistemul în circuit deschis*, $m = \text{grad}Q$, $n = \text{grad}P$, $m < n$.

$G_0(s)$ – *sistemul în circuit închis,* în care:

$$F(s) = 1 + G_d(s) = \frac{P(s)+Q(s)}{P(s)}. \qquad (4.15)$$

Zerourile lui $F(s)$ coincid cu polii lui $G_0(s)$.

Polii lui $F(s)$ coincid cu polii lui $G_d(s)$.

Studiul stabilităţii se bazează pe utilizarea funcţiei $F(s)$.

$$F(s) = 1 + G_d(s) = \frac{P(s)+Q(s)}{P(s)}. \qquad (4.15)$$

Zerourile lui $F(s)$ şi polii lui $G_0(s)$ coincid:

z_+ zerouri sunt în $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$ şi z_0 – în $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$.

Polii lui $F(s)$ şi polii lui $G_d(s)$ coincid:

n_+ poli sunt în $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$ şi n_0 – în $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$.

Punctul de la infinit ($s = \infty$) nu este zero sau pol pentru $F(s)$ deoarece $F(s)$ este raportul a două polinoame de gradul n.

Conform relaţiei (4.9), cu $m_+=z_+$, $m_0=z_0$, $m–n=n–n=0$, se scrie:

$$\arg F(j\text{µ})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\text{®}(n_+ - z_+) + \text{®}(n_0 - z_0). \qquad (4.16)$$

Sistemul automat este BIBO-stabil ę toţi polii lui $G_0(s)$ (*zerourile lui* $F(s)$!) sunt situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$ ę $z_+=z_0=0$.

Teorema 5 (Nyquist)

Sist. autom. cf. fig.VI.30 este BIBO-stabil dacă şi numai dacă

$$\arg F(j\text{µ})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\text{®}\, n_+ + \text{®}\, n_0. \qquad (4.17)$$

D. $$\arg F(j\text{µ})\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\text{®}(n_+ - z_+) + \text{®}(n_0 - z_0). \qquad (4.16)$$

Suf. (4.17) cu (4.16) $\Rightarrow z_+ = 0,\ z_0 = 0 \Rightarrow$ BIBO-stabilitatea.

Nec. Sist. aut. BIBO-stabil şi $z_+=0$, $z_0=0$; din (4.16) $\Rightarrow$ (4.17).■

$G_d(s)$ are n_+ şi n_0 poli în $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$ şi $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$.

Sist. în circ. deschis poate fi arbitrar BIBO-instabil!

Cf. Teoremei 5, **reactia negativă are efect stabilizant dacă şi numai dacă are loc (4.17), respectiv se alocă adecvat polii sistemului automat** .

Utilizând:

$$F(s) = 1 + G_d(s). \qquad (4.15)$$

se poate formula un rezultat bazat pe $G_d(s)$.

Se reprezintă hodograful $G_d(j\mu)$, $\mu \in \mathbf{R}$, iar hodograful:

$$F(j\mu) = 1 + G_d(j\mu),\ \ \mu \in \mathrm{R},$$

rezultă automat faţă de originea situată în $-1+j0$, fig.VI.31.

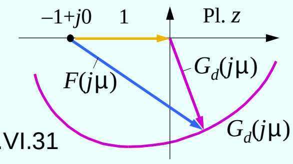


Fig.VI.31

Teorema 6 (Nyquist)

Sistemul automat, cf. fig.VI.30, este BIBO-stabil

ę locul $G_d(j\mu)$ înconjoară punctul $-1+j0$, în sens pozitiv, de $n_+ + n_0/2$ ori, pt. μ crescător de la $-\infty$ la $+\infty$. ■

Caz particular

Teorema 7 (Nyquist)

Sistemul automat, cf. fig.VI.30, în care $G_d(s)$ are cel mult doi poli în $s = 0$ şi restul sunt în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$, este BIBO-stabil

ę la parcurgerea locului $G_d(j\mu)$, pentru μ crescător de la $-\infty$ la $+\infty$, punctul $-1+j0$ rămâne la stânga şi în afara lui. ■

$G_d(j\mu)$ se parcurge pentru μ crescător de la $-\infty$ la $+\infty$, adică în sens negativ pe c. Nyquist, fig.VI.1.

Punctele situate la dreapta locului $G_d(j\mu)$ sunt interioare.

Se haşurează partea dreaptă a locului $G_d(j\mu)$.

Dacă $-1+j0$ nu este în zonă haşurată

Ĝ el este în exteriorul loc. $G_d(j\mu)$.

Exemplul 4.2

Fie SA cf. fig.VI.30, cu

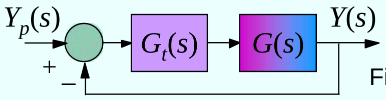


Fig.VI.30

$$G_d(s)=\frac{4s^2+10s+5}{s^3+2s^2+s+1}$$ al cărei numitor este hurwitzian.

$$s=j\mu\Rightarrow \mathrm{Re}\,G_d(j\mu)=\frac{-(2\mu^4+4\mu^2-5)}{\mu^6+2\mu^4-3\mu^2+1},\ \ \mathrm{Im}\,G_d(j\mu)=\frac{-\mu(4\mu^4+11\mu^2-5)}{\mu^6+2\mu^4-3\mu^2+1}.$$

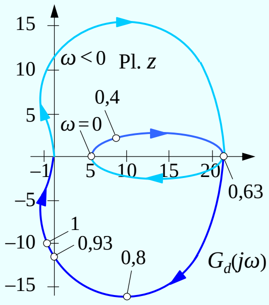


Fig.VI.32

Cf. tabelului:

μ	0	0,2	0,4	0,63	0,8	0,93	1	10	10^2	$+\infty$
Re $G_d(j\mu)$	5	5,3	7,7	20,4	10	≈0	–1	$-2\cdot10^{-2}$	$-2\cdot10^{-4}$	0
Im $G_d(j\mu)$	0	1,08	2,25	≈0	–18	–12,6	–10	$-2,2\cdot10^{-2}$	$-4\cdot10^{-2}$	0

$G_d(j\mu)$ este reprezentat în fig.VI.32.

$-1+j0$ este în exteriorul locului $G_d(j\mu)$.

Cf. teoremei 7 SA este BIBO-stabil. ■

Caz limită: $G_d(j\mu)=-1+j0$. $G_0(s)$ are poli în $\{\mathrm{Re}\, s = 0\}$.

SA este BIBO-instabil; $-1+j0$ se numeşte ***punctul critic***.

$G_d(j\mu)$ situat departe de p. critic reduce posibilitatea ca SA să devină BIBO-instabil la variaţia parametrilor.

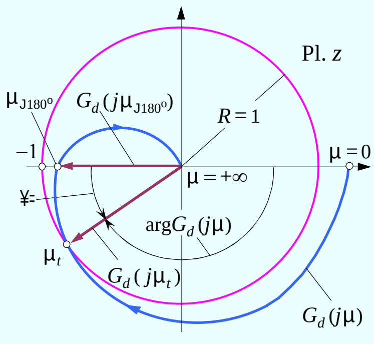


Fig.VI.34

BIBO-stabilitatea relativă, fig. VI.34

– ***marginea de amplificare***:

$m=1/|G_d\,(j\mu_{-180^o})|$,

pt. μ_{-180^o}, cf. $\arg G_d\,(j\mu_{-180^o}) = -180^o$;

– ***marginea de fază***:

$\gamma=\arg G_d(j\mu_t)+180^o$,

pt. μ_t, cf. $|G_d\,(j\mu_t)|=1$ şi $\arg G_d(j\mu_t)$

μ_t – *pulsaţia de tăiere* (A) ù μ_1 (FTJ real)

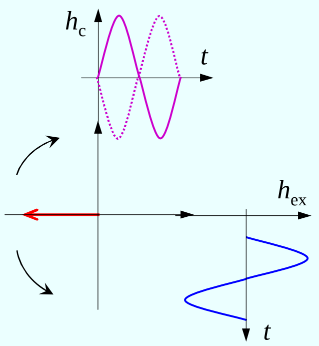
Se recomandă: $m = 3\div10$, ¥ = $30°\div50°$.

b. Aplicaţie: alegerea regulatorului unui SA de poziţionare

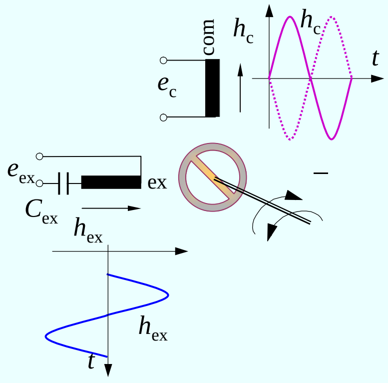
Câmpul magnetic învârtitor

$h_{ex} = -\,h_0 \cos \omega t,\;\; h_c = \pm\, h_0 \sin \omega t,$

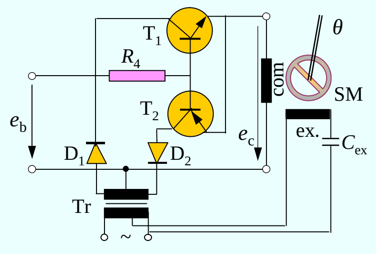
$h_c^2 + h_{ex}^2 = h_0^2$



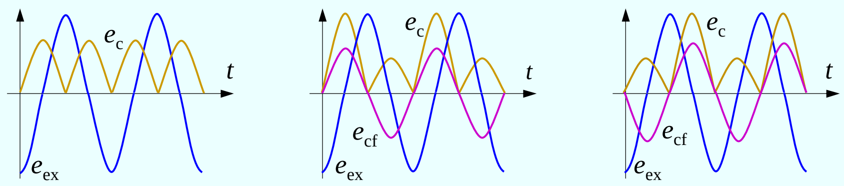
Servomotorul asincron bifazat



Comanda reversibilă a servomotorului asincrom bifazat



$e_b = 0$: repaus $e_b < 0$: rotaţie orară $e_b > 0$: rotaţie antiorară



Sistemul automat de poziţionare

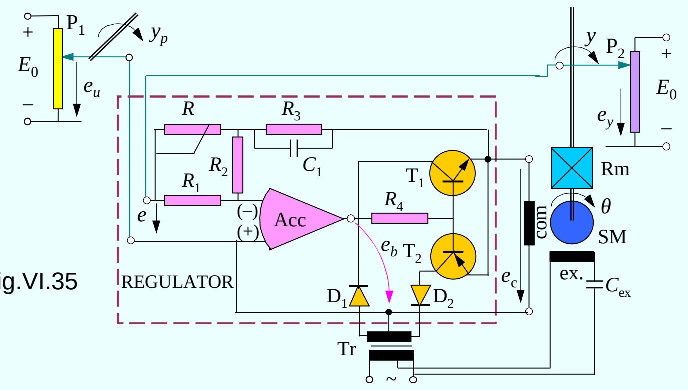


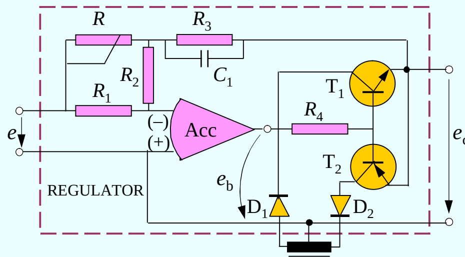
Fig.VI.35

SM – elementul de execuţie: servomotor asincron bifazat.

P_2 – potenţiometrul de reacţie; P2 – potenţiometrul de prescriere.

SM este comandat reversibil cu un redresor cu tranzistorii T_1, T_2, prin tensiunea de ieşire a amplificatorului operaţional.

Regulatorul: Acc + impedanţele de intrare şi de reacţie



$$Z_1(s) = \frac{RR_1}{R + R_1 + R_2},$$

$$Z_2(s) = \frac{RR_2}{R+R_1+R_2} + R_3(R_3C_1+1).$$

Legea de reglare: $$G_R(s) = \frac{E_c(s)}{E(s)} = -\frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} = -k_0\left(1 + \frac{k}{Ts+1}\right),$$

$$k_0 = \frac{R_2}{R_1},\ \ k = \frac{R_3}{R_2}\left(1 + \frac{R_1 + R_2}{R}\right),\ \ T = R_3C_1.$$

Reacţia prin R_3, C_1 de la emitorii $T_{1,2}$ asigură un cuplu de pornire al SM mai mare (creşterea rapidităţii).

Cf. fig.VI.35, funcţiile de transfer ale componentelor sunt:
Elementul de prescriere şi traductorul sunt

potenţiometrele P_1, P_2 (la axul SM prin Rm):

$$G_{\mathrm{P1}}(s)=\frac{E_u(s)}{Y_p(s)}=k_1,\ \ G_{\mathrm{P2}}(s)=\frac{E_y(s)}{Y(s)}=k_1.$$

Regulatorul:

$$G_{\mathrm{R}}(s)=\frac{E_{\mathrm{c}}(s)}{E(s)}=-k_0\left(1+\frac{k}{Ts+1}\right).$$

Servomotorul:

$$G_{\mathrm{SM}}(s)=\frac{\mathrm{n}(s)}{E_{\mathrm{c}}(s)}=-\frac{1}{T_1 s(T_2 s+1)};$$ (–) pentru a se compensa (–) din $G_{\mathrm{R}}(s)$.

Reductorul mecanic:

$$G_{\mathrm{Rm}}(s)=\frac{Y(s)}{\mathrm{n}(s)}=k_2.$$

Abaterea $E(s)=E_u(s)-E_y(s)$ este prop. cu eroarea $Y_p(s)-Y(s)$.

Schema bloc structurală a SA de poziţionare

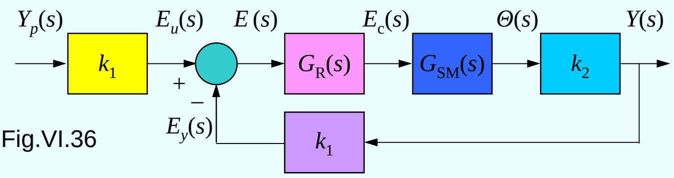


Fig.VI.36

$$G_{\mathrm{P1}}(s)=\frac{E_u(s)}{Y_p(s)}=k_1,\ \ G_{\mathrm{P2}}(s)=\frac{E_y(s)}{Y(s)}=k_1;\quad G_{\mathrm{R}}(s)=\frac{E_{\mathrm{c}}(s)}{E(s)}=-k_0\left(1+\frac{k}{Ts+1}\right).$$

$$G_{\mathrm{SM}}(s)=\frac{\mathrm{n}\,(s)}{E_{\mathrm{c}}(s)}=-\frac{1}{T_1 s(T_2 s+1)};\quad G_{\mathrm{Rm}}(s)=\frac{Y(s)}{\mathrm{n}\,(s)}=k_2.$$

Relaţia intrare - ieşire: $Y(s) = G_0(s)U(s)$,

$$G_0(s)=\frac{k_1 k_2 G_R(s) G_{SM}(s)}{1+k_1 k_2 G_R(s) G_{SM}(s)}=\frac{k_0 k_1 k_2 (Ts+k+1)}{T_1 s(T_2 s+1)(Ts+1)+k_0 k_1 k_2 (Ts+k+1)}.$$

1° $k_0 = 1$ şi $k = 0$ ($R_1 = R_2$ şi $R_3 = 0$), adică $G_R(s) = 1$.

Funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis are forma:

$$G_{d1}(s) = k_1 k_2 G_R(s) G_{SM}(s) = \frac{k_1 k_2}{T_1 s (T_2 s + 1)},$$

$$k_1 = 0,05[\mathrm{V/grad}],\ \frac{T_1}{k_2} = 0,5[\mathrm{sec}],\ T_2 = 0,005[\mathrm{sec}].$$

Pentru $s = j\mu$ se obţine:

$$M_{d1}(j\mu) = |G_{d1}(j\mu)| = \frac{2}{\mu\sqrt{\mu^2 + 400}},$$

$$\varphi_{d1}(j\mu) = \arg G_{d1}(j\mu) = 270^{\circ} - \mathrm{arctg}\,\frac{\mu}{20}.$$

μ	0	5	10	15	20	30	50	100	$+\infty$
$50M_{d1}$	$+\infty$	0,97	0,45	0,267	0,177	0,093	0,037	0,0098	0
φ_{d1}	– 90°	– 104°	– 117°	– 127°	– 135°	– 146°	– 158°	– 169°	– 180°

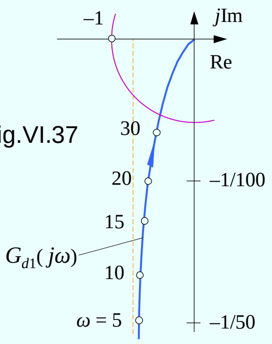


Fig.VI.37

–1 este în exteriorul locului $G_{d1}(j\mu)$.

Cf. t.7 SA este BIBO-stabil cu:

$$m = +\infty,\ k_0 > 0.$$

Pt. $k_0 > 1$ este posibil $\gamma = 30° \div 50°$.

Pt. intersecţia lui $k_0 G_{d1}(j\mu)$ cu cercul de rază 1 şi centru $(0, j0)$ se obţine:

$$\mu_1 = 20\sqrt{3},\ k_0 = 400\sqrt{3}.$$

Ecuaţia polilor SA: $T_1 T_2 s^2 + T_1 s + k_0 k_1 k_2 = 0$

Pentru pulsaţia naturală: $\mu_n = \sqrt{k_0 k_1 k_2 / T_1 T_2} = 37[\mathrm{rad/sec}].$

şi factorul de amortizare: $\zeta = 1/(2T_2\mu_n) = 0,27.$

din fig.II.47 rezultă : $\sigma\% = 40\%,\ t_s = 0,3$ sec.

2° Pentru $k > 0$ ($R_3 > 0$), se realizează un regulator PDT1:

$$G_R(s) = k_0\left(1+\frac{k}{Ts+1}\right).$$

Sistemul în circuit deschis :

$$G_{d2}(s) = \boxed{k_1 k_2 G_{SM}(s)}\,G_R(s) = \boxed{G_{d1}(s)}\,G_R(s).$$

$$G_R(j\mu) = k_0\left(1+\boxed{\frac{k}{Tj\mu+1}}\right).$$

cerc

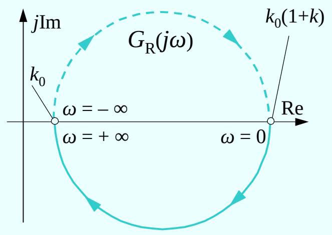


Fig. 38

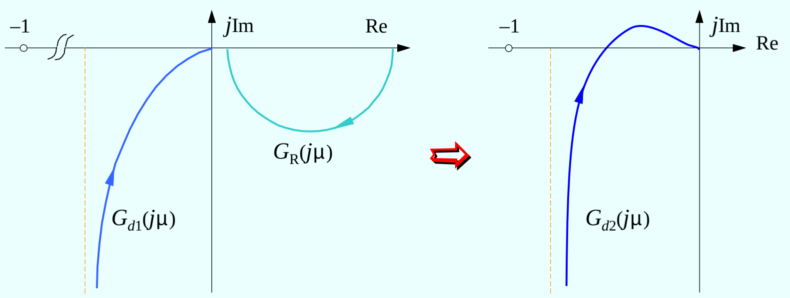
$$\mu = 0,\quad G_R(0) = k_0(1+k),$$

$$\mu = \pm\infty,\quad G_R(\pm j\infty) = k_0\,.$$

Locul de transfer $G_{d2}(j\mu) = G_{d1}(j\mu)G_R(j\mu)$ se obţine cu:

$$M_{d2}(\mu) = |G_{d2}(j\mu)| = M_{d1}(j\mu)M_R(j\mu),$$

$$\varphi_{d2}(\mu) = \arg G_{d2}(j\mu) = \varphi_{d1}(j\mu) + \varphi_R(j\mu).$$



Efectul regulatorului: rotire negativă a locului $G_{d1}(j\mu)$,
mai accentuată la frecvenţe medii.

Pentru k_0 = 40, k = 3, T = 0,05 s., rezultă

µ	0	5	10	15	20	30	50	100	+∞
M_R	160	155	144	130	117	94	63	50	40
¨ $_R$	0°	–10°	–19°	–27°	–31°	–35°	–35°	–27°	0°
$50M_{d1}$	+∞	0,97	0,45	0,267	0,177	0,093	0,037	0,0098	0
¨ $_{d1}$	–90°	–104°	–117°	–127°	–135°	–146°	–158°	–169°	–180°
M_{d2}	+∞	3	1,3	0,69	0,42	0,175	0,0465	0,0098	0
¨ $_{d2}$	–90°	–114°	–136°	–154°	–166°	–181°	–193°	–196°	–180°

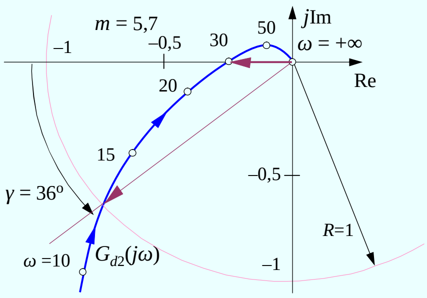


Fig.VI.39

$G_{d2}(j$µ$)$ – fig.VI.39.

Rotirea este suficientă pentru realizarea unei BIBO-stabilităţi relative satisfăcătoare:

m = 5,7, ¥= = 36°. ■