

Capitolul IV

LEGI DE REGLARE

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

1

Legile de reglare sunt realizate de regulator.
Componenta I poate exista în p. fixată (elem. de exec.).

1. Reglatoare cu amplificatoare operaționale

1.1. Amplificatorul operațional

Un amplificator operațional (fig.IV.1) este format din:

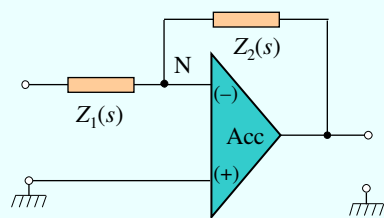


Fig.IV.1

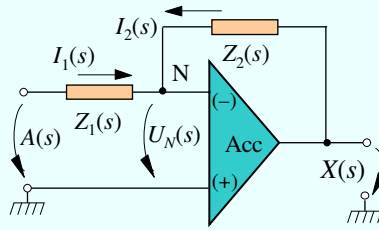
- amplificatorul de c.c. (Acc) cu $K_0 \rightarrow \infty$ pe un domeniu larg de frecvență, r_{intr} - f. mare, $r_{ieș}$ - f. mică;
- circuitul de intrare cu $Z_1(s)$;
- circuitul de reacție cu $Z_2(s)$.

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

2

Fig.IV.1



Pentru domeniul de liniaritate al Acc se scriu ecuațiile:

$$I_1(s) + I_2(s) = 0, \quad (1.1)$$

$$I_1(s) = \frac{A(s) - U_N(s)}{Z_1(s)}, \quad (1.2)$$

$$I_2(s) = \frac{X(s) - U_N(s)}{Z_2(s)}, \quad (1.3)$$

$$X(s) = -K_0 U_N(s). \quad (1.4)$$

Se elimină $I_1(s)$, $I_2(s)$, $U_N(s)$ între ecuațiile (1.1) – (1.4).

Se obține:
$$X(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \frac{1}{1 - \frac{1}{K_0} \left[1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \right]} A(s). \quad (1.5)$$

Se disting:

- funcția de transfer **ideală** a regulatorului:

$$G_R^i(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}; \quad (1.6)$$

- factorul de **corecție**:

$$C(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{K_0} \left[1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \right]}. \quad (1.7)$$

Funcția de transfer a regulatorului:

$$G_R(s) = G_R^i(s)C(s). \quad (1.8)$$

Din (1.7): $\lim_{K_0 \rightarrow \infty} C(s) = \lim_{K_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{K_0} \left[1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \right]} = 1, \quad (1.9)$

$$G_R(s) \cong G_R^i(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}. \quad (1.10)$$

- Cu $Z_1(s)$ și $Z_2(s)$ se obțin variate funcții de transfer respectiv diferite **legi de reglare**.
- Se introduce și o schimbare de semn intrare – ieșire; se compensează pe parcursul căii directe.

1.2. Reglatoare uzuale

Elementele de circuit utilizate: rezistențe și condensatoare.

Tabelul IV.1. Reglatoare PID

Tip	$Z_1(s) =$	$Z_2(s) =$	Parametri	$G_R(s) \cong G_R^i(s) =$	Schema
P	R_1	R_2	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$	$-k_P$	
PT ₁	R_1	$\frac{R_2}{R_2Cs + 1}$	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$ $T = R_2C$	$-\frac{k_P}{Ts + 1}$	
PI	R_1	$R_2 + \frac{1}{Cs}$	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$ $T_I = R_1C$	$-\left(k_P + \frac{1}{T_I s}\right)$	

Tip	$Z_1(s)=$	$Z_2(s)=$	Parametri	$G_R(s) \cong G_R^i(s)=$	Schema
PD	$\frac{R_1}{R_1 C s + 1}$	R_2	$k_P = \frac{R_2}{R_1}$ $T_D = R_2 C$	$-(k_P + T_D s)$	
PDT1	R_1	$R_2 + \frac{R_3}{R_3 C s + 1}$	$k_P = \frac{R_2 + R_3}{R_1}$ $T_D = \frac{R_2 R_3}{R_1} C$ $T = R_3 C$	$-\frac{k_P + T_D s}{T s + 1}$	
PID	$\frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}$	$R_2 + \frac{1}{C_2 s}$	$k_P = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$ $T_D = R_2 C_1$ $T_I = R_1 C_2$	$-\left(k_P + T_D s + \frac{1}{T_I s}\right)$	

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

7

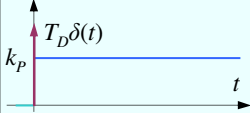
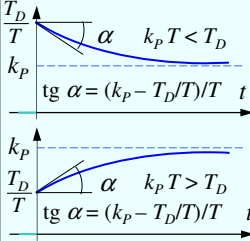
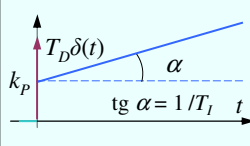
1.3. Caracteristici ale reglatoarelor PID (Tabelul IV.2)

$G_R(s) \cong G_R^i(s)$	Zerouri și /sau poli finiți	Legea reglării	$h_R(t) \cong h_R^i(t)$
P k_P	Nu există	$x = k_P a$	
PT1 $\frac{k_P}{T s + 1}$	$p = -\frac{1}{T}$	$T \dot{x} + x = k_P a$	
PI $k_P + \frac{1}{T_I s}$	$z = -\frac{1}{k_P T_I}$ $p = 0$	$x = k_P a + \frac{1}{T_I} \int_0^t a dt$	

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

8

$G_R(s) \cong G_R^i(s)$	Zerouri și / sau poli finiți	Legea reglării	$h_R(t) \cong h_R^i(t)$
PD $k_P + T_D s$	$z = -\frac{k_P}{T_D}$	$x = k_P a + T_D \dot{a}$	
PDT1 $\frac{k_P + T_D s}{T_I s + 1}$	$z = -\frac{k_P}{T_D}$ $p = -\frac{1}{T_I}$	$T \dot{x} + x = k_P a + T_D \dot{a}$	
PID $k_P + \frac{1}{T_I s} + T_D s$	$z_{1,2} = (-k_P \pm \frac{1}{2T_D} \sqrt{k_P^2 - 4\frac{T_D}{T_I}})$ $p = 0$	$x = k_P a + \frac{1}{T_I} \int_0^t a dt + T_D \dot{a}$	

M. Voicu, IA (IV) C8 (42) 9

2. Proprietăți ale SA cu reglatoare PID

Pentru obținerea unor rezultate

comparabile se consideră

sistemul automat din fig.IV.4

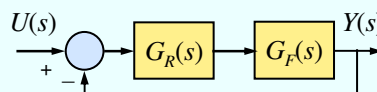


Fig.IV.4

având ca parte fixată un

element PT₂ cu funcția de transfer:

$$G_F(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2}, \quad \text{cu } \zeta \geq 0, \omega > 0, \quad (2.1)$$

sau

$$G_F(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}, \quad T_{1,2} = \frac{1}{\omega_n (\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1})}, \quad \text{cu } \zeta \geq 1. \quad (2.2)$$

2.1. Regulatorul P

$$G_R(s) = k_P; \quad k_P > 0.$$

$$G_F(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2},$$

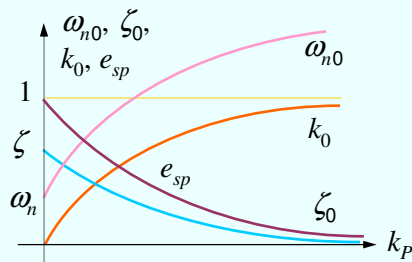


Fig.IV.5

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

11

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)},$$

$$G_0(s) = \frac{k_P k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2(k_P k + 1)},$$

$$G_0(s) = \frac{k_0 \omega_{n0}^2}{s^2 + 2\zeta_0 \omega_{n0} s + \omega_{n0}^2},$$

$$k_0 = \frac{k_P k}{k_P k + 1}, \quad \zeta_0 = \frac{\zeta}{\sqrt{k_P k + 1}},$$

$$\omega_{n0} = \omega_n \sqrt{k_P k + 1},$$

$$e_{sp} = 1 - k_0 = 1 - \frac{k_P k}{k_P k + 1} = \frac{1}{k_P k + 1}.$$

2.4. Regulatorul PID

$$G_R(s) = k_P + \frac{1}{T_I s} + T_D s, \quad k_P \geq 0, \quad T_I > 0, \quad T_D \geq 0.$$

Integratorul de pe calea directă asigură $e_{psp} = 0!$

Problema BIBO-stabilității

$$G_F(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}, \quad G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)},$$

$$G_0(s) = \frac{k\omega_n^2(T_D s^2 + k_P s + 1/T_I)}{s^3 + \omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D)s^2 + \omega_n^2(1 + k_P k)s + k\omega_n^2/T_I}.$$

$\Delta(s) =$

$$H_3 = \begin{bmatrix} \omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D) & 1 & 0 \\ k\omega_n^2/T_I & \omega_n^2(1 + k_P k) & \omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D) \\ 0 & 0 & k\omega_n^2/T_I \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

12

Cf. criteriului Hurwitz din (2.17) se obțin condițiile:

$$\det \mathbf{H}_1 = \omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D) > 0,$$

$$\det \mathbf{H}_2 = \omega_n^2[\omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D)(k_p k + 1) - k/T_I] > 0,$$

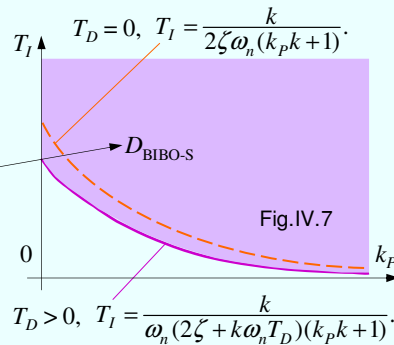
$$\det \mathbf{H}_3 = (k\omega_n^2/T_I)\det \mathbf{H}_2 > 0.$$

Pt. $\zeta \geq 0$, SA este BIBO-stabil
dacă și numai dacă: $T_D > 0$ și

$$T_I > \frac{k}{\omega_n(2\zeta + k\omega_n T_D)(k_p k + 1)}.$$

Pentru $T_D = 0$ (regulator PI)
condițiile devin: $\zeta > 0$ și

$$T_I > \frac{k}{2\zeta\omega_n(k_p k + 1)}.$$



$D_{\text{BIBO-S}}$ crește cu creșterea lui T_D .

Cu zerourile regulatorului PID
se pot compensa polii p. fixate.

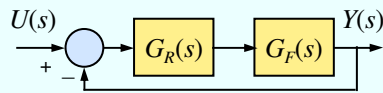


Fig. IV.4

$$G_R(s)G_F(s) = \left(k_p + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{T_D}{s} \left(s^2 + \frac{k_p}{T_D} s + \frac{1}{T_I T_D}\right) \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} =$$

$$= \left(s^2 + \frac{k_p}{T_D} s + \frac{1}{T_I T_D}\right) \frac{k\omega_n^2 T_D}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{k\omega_n^2 T_D}{s}, \quad \frac{k_p}{T_D} = 2\zeta\omega_n, \quad \frac{1}{T_I T_D} = \omega_n^2.$$

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \frac{k\omega_n^2 T_D}{s + k\omega_n^2 T_D} \triangleq \frac{1}{T_0 s + 1}, \quad T_0 = \frac{1}{k\omega_n^2 T_D}.$$

Cf. $t_{s0} = 3T_0 \leq t_{s0a}$ se alege T_D : $3T_0 = \frac{3}{k\omega_n^2 T_D} \leq t_{s0a} \Rightarrow T_D \geq \frac{3}{k\omega_n^2 t_{s0a}}$.

Apoi se ajustează $k_p = 2\zeta\omega_n T_D$, $T_I = \frac{1}{\omega_n^2 T_D}$.

Capitolul V

METODA LOCULUI RĂDĂCINILOR

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

15

1. Generalități

1.1. Formularea problemei

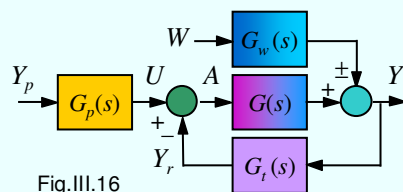


Fig.III.16

Calea directă a SA:

$$G(s) = G_R(s)G_E(s)G_{IA}(s).$$

Sinteza regulatorului:

Se adoptă indicii de calitate admisibili.



Se alocă polii și zerourile sistemului automat.



Se determină structura și parametrii regulatorului.

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

16

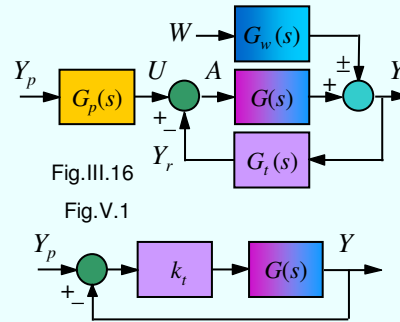
- Calea directă a SA:

$$G(s) = G_R(s)G_E(s)G_{IA}(s).$$

Fig.III.16, cu $W(s)=0$ și

$$G_p(s) = G_t(s) = k_p = k_t,$$

conduce la fig.V.1.



- Circuitul deschis al SA:

$$G_d(s) = k_t G(s).$$

- Circuitul închis al SA:

$$G_0(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_d(s)}$$

$$1 + G_d(s) = 0. \quad (1.4)$$

Ecuția (1.4) are ca rădăcini exact polii sistemului automat.

$$1 + G_d(s) = 0, \quad (1.4) \quad G_d(s) = \frac{kM(s)}{N(s)}, \quad (1.5)$$

$M(s)$ și $N(s)$ – polinoamele zerourilor și al polilor (prime).

$k \geq 0$ – factorul de amplificare al sistemului în circuit deschis.

Din (1.4), (1.5) rezultă:

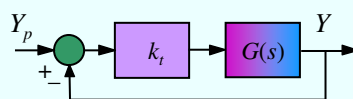
$$1 + \frac{kM(s)}{N(s)} = 0, \quad (1.6) \quad N(s) + kM(s) = 0. \quad (1.7)$$

Pentru $M(s)$, $N(s)$ fixati, rădăcinile ecuației (1.7), respectiv polii sistemului automat (în circuit închis) depind de $k \geq 0$.

Graficul corespunzător este **locul geometric al rădăcinilor**.

Este util în analiza SA și, mai ales, în **sinteza regulatorului**.

Exemplul 1.1



$$G_d = \underbrace{k_t}_{=1} G(s) = G_R(s) \underbrace{G_E(s)}_{=1} G_{IA}(s) = G_R(s) \frac{1}{Ts+1},$$

Fig.V.1

a) $G_R(s) = k$, b) $G_R(s) = \frac{k}{s}$.

Să se studieze dependența polilor SA de parametrul $k \geq 0$.

a) $G_R(s) = k$, $G_d(s) = \frac{k}{Ts+1}$,

$M(s) = 1$, $N(s) = Ts + 1$.

Ecuția polilor SA este:

$$N(s) + kM(s) = 0, \quad (1.7)$$

$$Ts + 1 + k = 0 \rightarrow s = -\frac{k+1}{T}$$

$$k = 0, s = -\frac{1}{T}; \quad k = +\infty, s = -\infty.$$

Locul rădăcinilor:

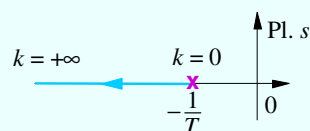


Fig.V.2

b) $G_R(s) = \frac{k}{s}$, $G_d(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$, $M(s) = 1$, $N(s) = s(Ts+1)$.

Ecuția polilor SA este:

$$N(s) + kM(s) = 0, \quad (1.7)$$

$$Ts^2 + s + k = 0.$$

Discriminantul: $\Delta = 1 - 4kT$

Rădăcinile ecuației polilor sunt :

$$s_{1,2} = \begin{cases} \frac{-1 \pm \sqrt{1-4kT}}{2T}, & 0 \leq k \leq \frac{1}{4T}; \\ \frac{-1 \pm j\sqrt{4kT-1}}{2T}, & k > \frac{1}{4T}. \end{cases} \quad k=0, \begin{cases} s_1=0, \\ s_2=-\frac{1}{T}. \end{cases} \quad k=\frac{1}{4T}, s_{1,2}=-\frac{1}{2T}.$$

$$k=+\infty, |s_{1,2}|=+\infty. \quad \blacksquare$$

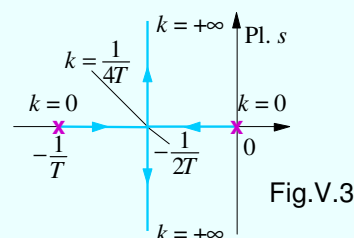
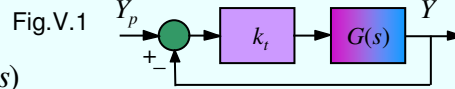


Fig.V.3

Fie sistemul automat:



$$G_d(s) = k_r G(s), \quad G_0(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_d(s)},$$

$$1 + G_d(s) = 0,$$

$$G_d(s) = \frac{k M(s)}{N(s)},$$

$$1 + \frac{k M(s)}{N(s)} = 0,$$

$$N(s) + kM(s) = 0. \quad (1.7)$$

Problema: să se determine dependența polilor sistemului în circuit închis (SA, rădăcinile ecuației (1.7)) de parametrul $k \geq 0$ al sistemului în circuit deschis.

Rezultatul: *locul rădăcinilor*, respectiv locul geometric al rădăcinilor ecuației polilor SA (1.7) pentru $k \geq 0$.

1.2. Ecuațiile fundamentale ale locului rădăcinilor

Fie: $M(s) = \prod_1^m (s - z_\alpha)$, $N(s) = \prod_1^n (s - p_\beta)$, $m \leq n$;

z_α și p_β – zerourile și polii sist. în circuit deschis; $z_\alpha \neq p_\beta$.

$$1 + k \frac{M(s)}{N(s)} = 0, \quad k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)} = -1, \quad s \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{R}_+. \quad (1.10)$$

Se definesc fazorii:

$$s - z_\alpha = A_{z\alpha} e^{j\theta_{z\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1, m}; \quad A_{z\alpha} \geq 0, \quad \theta_{z\alpha} \in \mathbf{R}; \quad (1.11)$$

$$s - p_\beta = A_{p\beta} e^{j\theta_{p\beta}}, \quad \beta = \overline{1, n}; \quad A_{p\beta} \geq 0, \quad \theta_{p\beta} \in \mathbf{R}. \quad (1.12)$$

Din (1.10) – (1.12):

$$k \frac{\prod_1^m A_{z\alpha} e^{j\theta_{z\alpha}}}{\prod_1^n A_{p\beta} e^{j\theta_{p\beta}}} = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} k \frac{\prod_1^m A_{z\alpha}}{\prod_1^n A_{p\beta}} = 1, \\ \sum_1^m \theta_{z\alpha} - \sum_1^n \theta_{p\beta} = (2i+1)\pi, \quad i \in \mathbf{Z}. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

$$\sum_1^m \theta_{z\alpha} - \sum_1^n \theta_{p\beta} = (2i + 1)\pi, i \in \mathbf{Z}. \quad (1.14)$$

Ecuția (1.14), independentă de k , exprimă **proprietatea esențială** utilizabilă pentru trasarea locului rădăcinilor:

Punctul s aparține locului rădăcinilor dacă și numai dacă suma argumentelor fazorilor cu originea în zerourile lui $G_d(s)$ și vârful în s minus suma argumentelor fazorilor cu originea în polii lui $G_d(s)$ și vârful în s este un multiplu impar de π .

Ecuția (1.13), pusă sub forma $k = \frac{\prod_1^n A_{p\beta}}{\prod_1^m A_{z\alpha}}, \quad (1.15)$

este utilă pentru parametrizarea locului rădăcinilor după $k \geq 0$.

2. Reguli de trasare a locului rădăcinilor

1° Pentru $k \geq 0$ cele n rădăcini ale polinomului polilor SA pornesc din polii și ajung în zerourile lui $G_d(s)$.

\mathcal{D} . Ecuția polilor

$$N(s) + kM(s) = 0 \quad (1.7)$$

are n rădăcini. Pentru

$$N(s) = \prod_1^n (s - p_\beta), \quad (1.9)$$

cu $k = 0$, din (1.7) rezultă

$$\prod_1^n (s - p_\beta) = 0.$$

Locul rădăcinilor pornește din polii sist. în circuit deschis.

Se înmulțește (1.7) cu k^{-1} și se obține:

$$k^{-1}N(s) + M(s) = 0. \quad (\star)$$

Pentru $k \rightarrow +\infty$ și $M(s) = \prod_1^m (s - z_\alpha)$ din ecuația (\star) rezultă

$$\prod_1^m (s - z_\alpha) = 0.$$

Din totalul de n ramuri ale locului rădăcinilor, m ramuri ajung în cele m zerouri finite ale sistemului în circuit deschis.

Pe de altă parte, din ecuația

$$k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)} = -1, \quad m < n, \quad (1.10)$$

pentru $k \rightarrow +\infty$, rezultă $|s| \rightarrow +\infty$.

Restul de $n - m$ ramuri ale loc. răd. ajung în punctul de la ∞ . ■

2° Ramurile locului rădăcinilor sunt simetrice două câte două față de axa reală a planului s .

D. Ec. (1.7) are răd. reale sau complex conjugate. ■

3° În Pl. s se plasează pe axa reală zerourile reale (o) și polii reali (x) ai lui $G_d(s)$; se notează cu L_1, L_2, L_3, \dots (de la $+\infty$ la $-\infty$, incl. multiplicat.). $L_1L_2, L_3L_4, L_5L_6, \dots \in$ locului rădăcinilor.

$$\mathcal{D}. \quad \sum_1^m \theta_{z_\alpha} - \sum_1^n \theta_{p_\beta} = (2i+1)\pi, \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (1.14)$$

$$s - z_\alpha = A_{z_\alpha} e^{j\theta_{z_\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1, m}; \quad A_{z_\alpha} \geq 0, \quad \theta_{z_\alpha} \in \mathbf{R}; \quad (1.11)$$

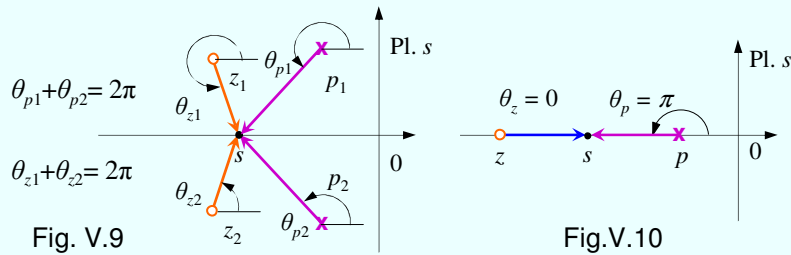
$$s - p_\beta = A_{p_\beta} e^{j\theta_{p_\beta}}, \quad \beta = \overline{1, n}; \quad A_{p_\beta} \geq 0, \quad \theta_{p_\beta} \in \mathbf{R}. \quad (1.12)$$

Cf. ec. (1.14), $s \in \mathbf{R}$ aparține loc. răd. \Leftrightarrow contribuția arg. faz.

(1.11) și (1.12) în (1.14) este un multiplu impar de π .

Contribuția unei perechi de poli / zerouri complex conjugate este 2π (fig. V.9).

Contribuția unui pol / zero real situat la dreapta / stânga lui s este π / respectiv 0 (fig.V.10).



Punctul s , situat pe axa reală, aparține locului rădăcinilor dacă și numai dacă la dreapta lui s , pe axa reală, există un număr impar de poli și zerouri. ■

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

27

Exemplul 2.3

Fie
$$G_d(s) = \frac{k(s+1)(s+3)(s+5)}{(s+2)^2(s+4)^2}.$$

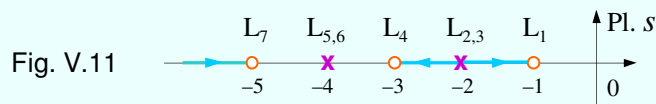
Să se determine partea reală a locului rădăcinilor.

În fig.V.11 se plasează pe axa reală de la dreapta la stânga

zerourile (o) $-1, -3, -5$ și

polii (x) -2 (dublu), -4 (dublu).

Se notează de la dreapta la stânga cu $L_1, L_{2,3}, L_4, L_{5,6}, L_7$.



$L_1L_2, L_3L_4, L_5L_6, L_7$ la $-\infty$ aparțin locului rădăcinilor. ■

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

28

4°. Pt. $n - m \geq 1$, $n - m$ ramuri ajung în p. de la ∞ , pt. $k \rightarrow +\infty$, de-a lungul a $n - m$ **asimptote**, care trec prin **centroidul** :

$$s_{cg} = \frac{1}{n-m} \left(\sum_1^n p_\beta - \sum_1^m z_\alpha \right) \quad (2.1)$$

și care au **direcțiile**:

$$\theta_i = \frac{2i-1}{n-m} \pi, \quad i = \overline{1, n-m}. \quad (2.2)$$

\mathcal{D} . Se înmulțește ecuația: $k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)} = -1$ (1.10)

cu $\frac{\prod_1^n (s - p_\beta)}{\prod_1^m (s - z_\alpha)}$. Rezultă

$$\frac{\prod_1^n (s - p_\beta)}{\prod_1^m (s - z_\alpha)} + k = 0; \quad n - m \geq 1. \quad (2.3)$$

Din (2.3) rezultă că pentru $k \rightarrow +\infty$ se obține $|s| \rightarrow +\infty$.

Pentru k și $|s|$ suficient de mari, restul împărțirii din (2.3) este neglijabil. Din (2.3) se obține polinomul:

$$s^{n-m} + \left(\sum_1^m z_\alpha - \sum_1^n p_\beta \right) s^{n-m-1} + \dots + k = 0, \quad (2.4)$$

cu rădăcinile $s_i(k)$, $i = \overline{1, n-m}$, cu $|s_i(k)| \rightarrow +\infty$ pentru $k \rightarrow +\infty$.

Conform primei formule Viète :

$$\sum_1^{n-m} s_i(k) = - \left(\sum_1^m z_\alpha - \sum_1^n p_\beta \right)$$

centroidul rădăcinilor (centrul de greutate) este:

$$s_{cg} = \frac{1}{n-m} \sum_1^{n-m} s_i(k) = - \frac{1}{n-m} \left(\sum_1^m z_\alpha - \sum_1^n p_\beta \right).$$

Pt. $k \rightarrow +\infty$ și $|s| \rightarrow +\infty$ din (2.4) se obține $s^{n-m} + k = 0$, respectiv

$$s_i(k) = k^{(n-m)^{-1}} e^{j \frac{(2i-1)\pi}{n-m}}, \quad i = \overline{1, n-m}, \quad \text{din care rezultă direcțiile (2.2).} \blacksquare$$

5°. Pe locul răd. situat între două zerouri reale / doi poli reali există puncte de ramif. date de rădăcini reale ale ecuației:

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_\alpha} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_\beta} = 0, x \in \mathbf{R}. \quad (2.5)$$

În / din p. de ram. sosesc / pleacă două ramuri ale loc. răd.

\mathcal{D} . Ec. polilor $1 + G_d(x) = 0$ are răd. dublă $x \in \mathbf{R}$. Urmează că

$$1 + G_d(x) = 0, (1 + G_d(x))' = 0, \text{ adică } G_d(x) = -1, G'_d(x) = 0.$$

Se logaritmează $G_d(s) = k \frac{\prod_1^m (s - z_\alpha)}{\prod_1^n (s - p_\beta)}$ și se derivează:

$$\ln G_d(x) = \ln k + \sum_1^m \ln(x - z_\alpha) - \sum_1^n \ln(x - p_\beta),$$

$$\frac{G'_d(x)}{G_d(x)} = \sum_1^m \frac{1}{x - z_\alpha} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_\beta} = 0. \text{ Adică are loc (2.5). } \blacksquare$$

Exemplul 2.4.

$$\text{Fie } G_d(s) = \frac{k(s+4)}{(s+1)(s+2)^2}.$$

Să se traseze locul rădăcinilor.

$[-4, -1]$ aparține loc. rădăcinilor.

Între -2 și -1 există un p. de ramif., rădăcină a ecuației:

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} = 0,$$

$$2x^2 + 13x + 14 = 0, x_2 = -1,36 \text{ (p. de ramificare), fig. V.12.}$$

Cf. 4°, 2 ramuri ajung la ∞ , cu $s_{cg} = (-1 - 2 - 2 + 4)/2 = -0,5$.

Directiile asimptotelor: $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 3\pi/2$, fig. V.12. \blacksquare

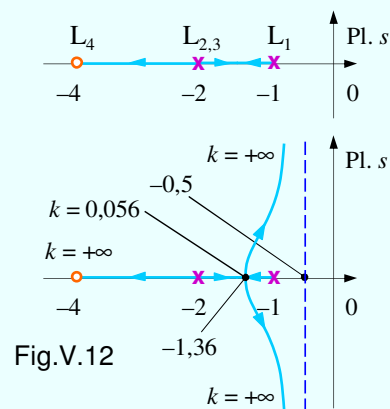


Fig.V.12

6°. Din / în polii / zerourile reale multiple pleacă / sosesc un număr de ramuri egal cu multiplicitatea q a polilor / zerourilor.

Direcțiile tangentelor (în poli / zerouri) sunt:

$$\theta_i = 2\pi i/q, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad (2.6)$$

dacă numărul de zerouri și de poli reali la dreapta este impar;

$$\theta_i = (2i+1)\pi/q, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad (2.7)$$

dacă numărul de zerouri și de poli reali la dreapta este par.

D. Este o consecință directă a ec. (1.14).

Exemplul 2.5

Fie $G_d(s) = \frac{k(s+1)}{s^2}$.

Să se traseze locul rădăcinilor.

Intervalul $(-\infty, -1]$ aparține

locului rădăcinilor.

Din polul dublu $s = 0$ pornesc 2 ramuri ale căror tangente în $s = 0$ au direcțiile $\theta_0 = \pi/2, \theta_1 = 3\pi/2$.

Locul rădăcinilor este tangent, în origine, la axa imaginară.

Cf. 5° există un punct de ramificare $x = -2$

(o răd. a ec. $1/(x+1) - 2/x = 0$), coresp. $k = 4$, fig.V.13. ■

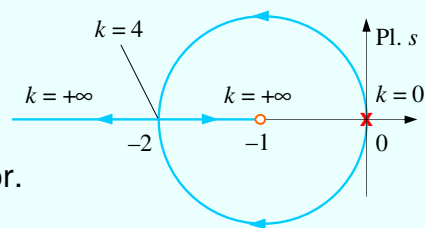


Fig.V.13

7°a. Din polii (p_b) complecși multipli pleacă un număr de ramuri egal cu multiplicitatea n_b a polilor.

Direcțiile tangentelor la ramuri sunt respectiv:

$$\theta_{bi} = \frac{1}{n_b} \left[\sum_{\alpha=1}^m \arg(p_b - z_\alpha) - \sum_{\beta=1, \beta \neq b}^n \arg(p_b - p_\beta) - (2i+1)\pi \right], \quad i = \overline{0, n_b - 1},$$

b. In zerourile (z_a) complexe multiple sosesc un număr de ramuri egal cu multiplicitatea m_a zerourilor.

Direcțiile tangentelor la ramuri sunt respectiv:

$$\theta_{ai} = \frac{1}{m_a} \left[\sum_{\alpha=1, \alpha \neq a}^m \arg(z_a - z_\alpha) - \sum_{\beta=1}^n \arg(z_a - p_\beta) - (2i+1)\pi \right], \quad i = \overline{0, m_a - 1},$$

\mathcal{D} . Este o consecință directă a ecuației (1.14). ■

8°. După determinarea punctelor de ramificare și a numărului de ramuri care sosesc în și pleacă din fiecare punct de ramificare (în total $2r$ ramuri), rezultă că unghiurile dintre două ramuri alăturate este $2\pi/2r = \pi/r$.

\mathcal{D} . Această regulă este o consecință directă a ec. (1.14). ■

9°. Punctele de intersecție ale locului rădăcinilor cu axa imaginară:

$$N(j\omega) + kM(j\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad k \geq 0. \quad (2.10)$$

\mathcal{D} . Ecuația (2.10) se obține din (1.7) pentru $s = j\omega$. ■

$$N(j\omega) + kM(j\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad k \geq 0. \quad (2.10)$$

Din (2.10) se obține k și ω

O altă posibilitate – schema Routh (II.6.5) aplicată polinomului polilor. Elementele antepenultimei linii se notează cu $a(k)$ și $b(k)$; k și ω se obțin din:

$$a(k)s^2 + b(k) = 0.$$

10°. Parametrizarea după $k \geq 0$: se măsoară segmentele

$$A_{z\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad A_{p\beta}, \quad \beta = \overline{1, n},$$

pentru anumite puncte ale loc. răd. și calculul lui k cu

$$k = \prod_1^n A_{p\beta} / \prod_1^m A_{z\alpha}. \quad (1.15) \quad \blacksquare$$

Exemplul 2.6

$$\text{Pentru } G_d(s) = \frac{k(s+2)}{s(s+3)(s+8)(s+4-j5)(s+4+j5)}$$

să se traseze locul rădăcinilor.

a. (1°) Se plasează în pl. s :

$$z_1 = -2, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -3, \quad p_3 = -8, \quad p_{4,5} = -4 \pm j5.$$

Pentru $k = 0$ locul rădăcinilor pleacă din p_1, \dots, p_5 .

Pentru $k = +\infty$ o ramură ajunge în z_1 și alte patru ajung în punctul de la ∞ (fig.V.14).

b. (2°) Locul rădăcinilor este simetric față de axa reală a pl. s .

c. (3°) Se notează $L_1(0)$, $L_2(-2)$, $L_3(-3)$, $L_4(-8)$.

Segmentele L_1L_2 , L_3L_4 de pe axa reală a aparțin
locului rădăcinilor (fig.V.14).

d. (4°) Numărul de ramuri la ∞ este $n - m = 4$.

Centroidul:

$$s_{cg} = (0 - 3 - 8 - 4 + j5 - 4 - j5 + 2)/4 = -4,25.$$

Direcțiile asimptotelor:

$$\theta_1 = \pi/4, \theta_2 = 3\pi/4, \theta_3 = 5\pi/4, \theta_4 = 7\pi/4.$$

e. (5°) Punctul de ramificație, $x \cong -5,2$, rezultă din ecuația:

$$1/(x+2) - 1/x - 1/(x+3) - 1/(x+8) - 1/(x+4-j5) - 1/(x+4+j5) = 0.$$

f. (7°) Unghiurile tangentelor

în $p_{4,5}$ sunt:

$$\theta_{p_4} = -78^\circ, \theta_{p_5} = 78^\circ,$$

Conform fig.V.15,

se măsoară:

$$\theta_{z_1}, \theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \theta_{p_3}, \theta_{p_5}$$

și se calculează:

$$\begin{aligned} \theta_{p_4} &= \theta_{z_1} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3} + \theta_{p_5}) - 180^\circ = \\ &= 112^\circ - (128^\circ + 101^\circ + 51^\circ + 90^\circ) - 180^\circ = -438^\circ \rightarrow -438^\circ + 360^\circ = -78^\circ. \end{aligned}$$

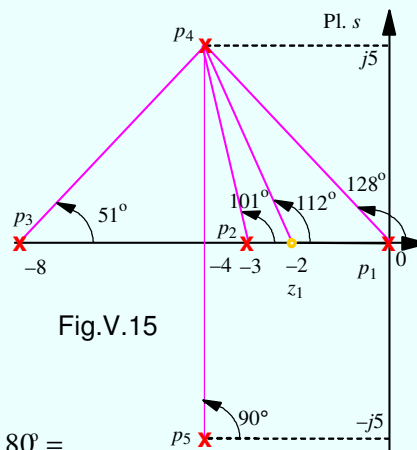
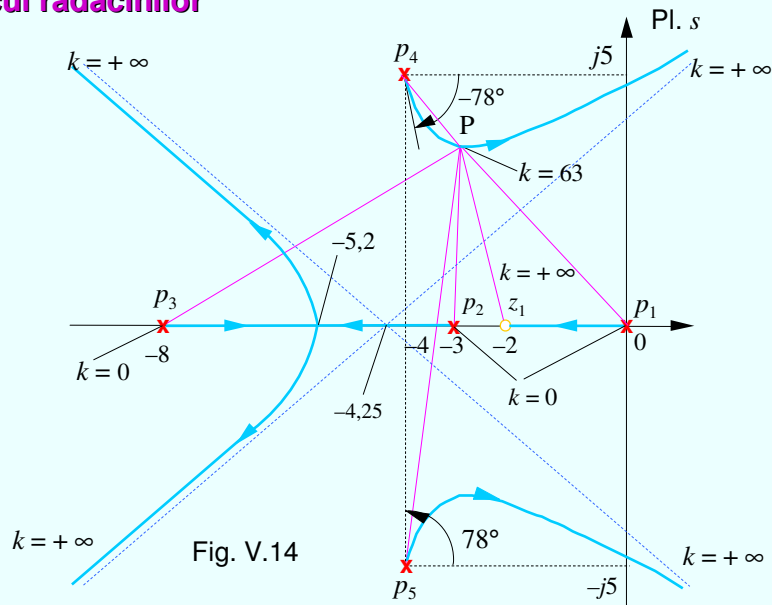


Fig.V.15

g. (8°) Unghiurile dintre 2 ramuri alăturate în p. de ram.: $\pi/2$.

Locul rădăcinilor



M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

41

h. (9°) Din ecuația : $N(s) + kM(s) = 0, (1.7)$ se obține:

$$s^5 + 19s^4 + 153s^3 + 643s^2 + (948 + k)s + 2k = 0.$$

Pt. $s = j\omega$ se obține:

$$\begin{cases} 19\omega^4 - 643\omega^2 + 2k = 0 \\ \omega^5 - 153\omega^3 + (984 + k)\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \cong \pm 4,939, \\ k_0 = 2165. \end{cases}$$

Pt. $k = 2165$, pct. de intersecție cu axa imag.: $s \cong \pm j4,939$.

Pt. $k \geq 2165$ sistemul automat este BIBO-instabil.

i. (10°) Locul rădăcinilor se parametrizează după k , rel. (1.15).

De ex., pt. P (fig.V.14) se măsoară $Ap_1 = |Pp_1| = 2,4$,
 $Ap_2 = |Pp_2| = 2,02$, $Ap_3 = |Pp_3| = 4,87$, $Ap_4 = |Pp_4| = 1,2$,
 $Ap_5 = |Pp_5| = 4,42$, $Az_1 = |Pz_1| = 1,99$. Rezultă $k \cong 63$. ■

M. Voicu, IA (IV)

C8 (42)

42