

5 c) Elementul de întârziere de ordinul 2 (T2)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (7.6)$$

$\omega_n > 0$ este **pulsația naturală**,

$\zeta \geq 0$ este **factorul de amortizare**.

Sistemul are doi poli care pot fi:

$$p_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}), \quad 0 \leq \zeta < 1; \quad (7.7)$$

$$p_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}), \quad \zeta \geq 1. \quad (7.8)$$

În cazul polilor reali, elementul T_2 este echivalent cu două elemente T_1 înseriate.

Se poate utiliza și următoarea funcție de transfer:

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}, \quad (7.9)$$

în care $T_{1,2} > 0$ sunt **constantele de timp**.

Relațiile cu parametrii ω_n și ζ sunt următoarele:

$$T_{1,2} = \frac{1}{\omega_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})}, \quad \zeta \geq 1. \quad (7.10)$$

Răspunsul indicial al elementului T2 are forma:

$$h(t) = \begin{cases} \left[1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\underbrace{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}_{\omega_p} \right) \right] \sigma(t); & 0 \leq \zeta < 1; \\ \left[1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} \right] \sigma(t); & \zeta = 1; \\ \left[1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \operatorname{sh} \left(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t + \operatorname{argth} \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta} \right) \right] \sigma(t); & \zeta > 1. \end{cases} \quad (7.11)$$

$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ este **pulsația proprie.**

Pentru $\zeta = 0$ răspunsul indicial este neamortizat:

$$h(t) = \left[1 - \sin \left(\omega_n t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \sigma(t). \quad (7.12)$$

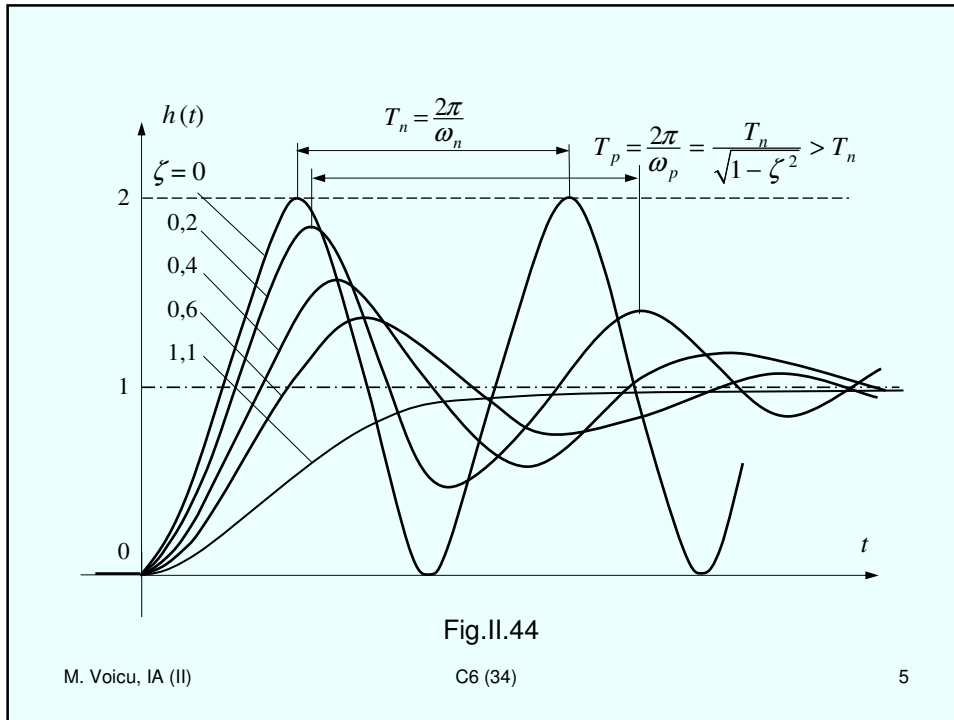
este **pulsația naturală,**

$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ este **perioada naturală.**

Pentru $0 < \zeta < 1$ oscilația sinusoidală amortizată se caracterizează prin:

$$\text{pulsația proprie } \omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} < \omega_n; \quad (7.13)$$

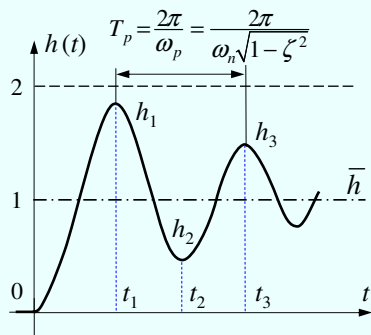
$$\text{perioada proprie } T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} > T_n. \quad (7.14)$$



Extreemele succesive ale lui $h(t)$ pentru $0 < \zeta < 1$

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), t > 0;$$

$$h'(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t = 0, \quad \underbrace{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}_{\frac{2\pi}{T_p}} = k\pi, \quad k=0,1,2,\dots,$$



$$t_k = \frac{kT_p}{2}, \quad k=0,1,2,\dots,$$

$$h_k = 1 + (-1)^{k+1} e^{\frac{-k\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$\bar{h} = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 1.$$

M. Voicu, IA (II)

C6 (34)

6

Extremele: $h_k = 1 + (-1)^{k+1} e^{\frac{-k\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Primul maxim: $h_1 = 1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

Regimul staționar: $\bar{h} = 1$.

Indicii de calitate:

Suprareglarea $\sigma = \frac{h_1 - \bar{h}}{\bar{h}} = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, $0 \leq \zeta < 1$. (7.29)

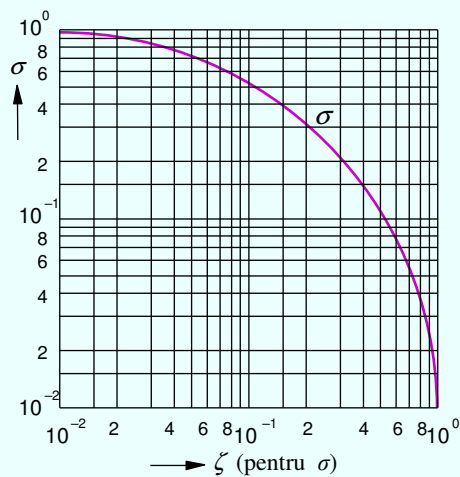
Durata regimului tranzitoriu t_s :

Soluția sistemului $0,95\bar{h} \leq h(t) \leq 1,05\bar{h}$, $t \geq t_s$,

este $\tau_s = \omega_n t_s$, v. Fig.II.47.

numită ***durata adimensională a regimului tranzitoriu.***

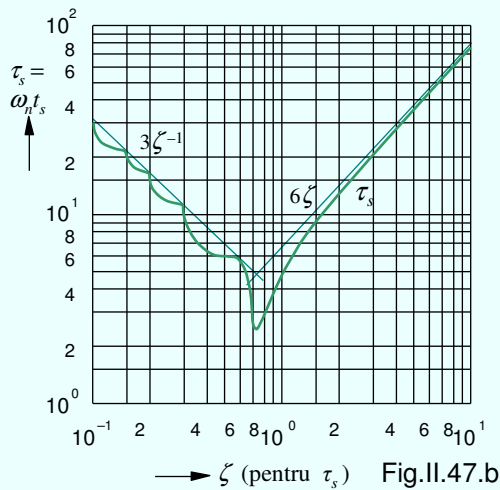
Suprareglarea



$$\sigma = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad 0 \leq \zeta < 1.$$

Fig.II.47.a

Durata adimensională a regimului tranzitoriu



$$0,95\bar{h} \leq h(t) \leq 1,05\bar{h}, \quad t \geq t_s,$$

$$\tau_s = \omega_n t_s$$

τ_s minim pt. $\zeta = 0,707$.

Aproximări:

$$\tau_s \cong 3/\zeta, \quad 0 < \zeta \leq 0,707,$$

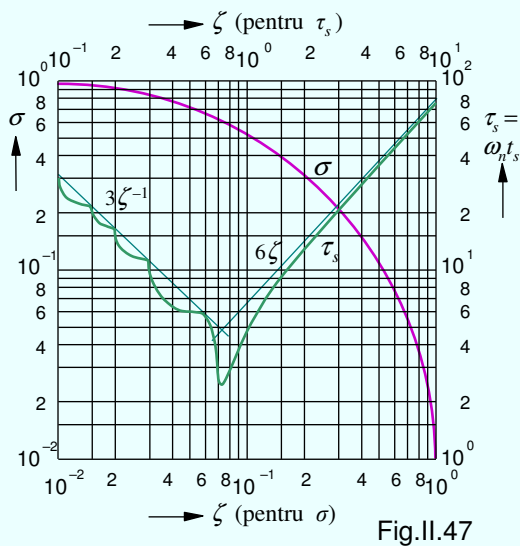
$$\tau_s \cong 6\zeta, \quad \zeta > 0,707.$$

M. Voicu, IA (II)

C6 (34)

9

De regulă σ și τ se reprezintă în aceeași diagramă.



Suprareglarea

$$\sigma = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad 0 \leq \zeta < 1.$$

Durata adimensională a regimului tranzitoriu

τ_s minim pt. $\zeta = 0,707$.

Aproximări:

$$\tau_s \cong 3/\zeta, \quad 0 < \zeta \leq 0,707,$$

$$\tau_s \cong 6\zeta, \quad \zeta > 0,707.$$

M. Voicu, IA (II)

C6 (34)

10

6 f) Elementul cu timp mort $G(s) = e^{-Ts}$, $T > 0$, (7.42)

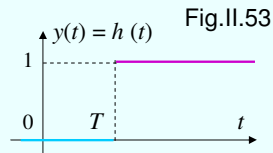
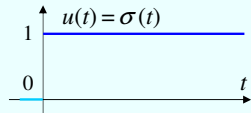


Fig.II.53

Exemplu: bandă rulantă

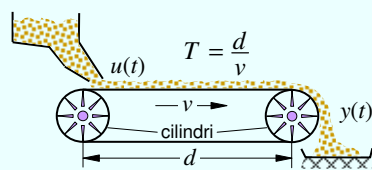


Fig.II.54

$$h(t) = \sigma(t - T). \quad (7.44)$$

T – **timpul mort**

$$y(t) = u(t - T). \quad (7.43)$$

- Liniar, invariant în timp
- (7.42) – transcendentă
- Sisteme cu parametri distribuiți spațial cu:

transport de substanță,
transfer de energie,
transmisie de semnale.

7.4. Poli și zerouri dominante

Indicii de calitate depind de localizarea polilor și zerourilor.

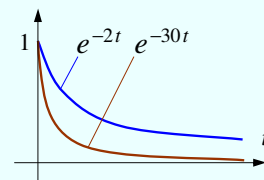
Exemplul 7.7

Să se determine $h(t)$ și rolul polilor pentru

$$G(s) = \frac{60}{(s+2)(s+30)}.$$

Folosind teorema dezvoltării se obține:

$$h(t) = \left(1 - \frac{15}{14}e^{-2t} + \frac{1}{14}e^{-30t}\right)\sigma(t).$$



Se observă că

e^{-30t} este asociată lui $p_2 = -30$; e^{-2t} este asociată lui $p_1 = -2$.

Pentru $t \rightarrow \infty$, $e^{-30t} \rightarrow 0$ mai repede ca $e^{-2t} \rightarrow 0$.

Se spune că $p_2 = -30$ este mai **rapid** ca $p_1 = -2$,

sau că $p_1 = -2$ este mai **lent** ca $p_2 = -30$.

Cu cât un pol este mai aproape / departe de axa imaginară,
cu atât este mai **lent** / **rapid**.

e^{-2t} persistă un timp mai lung, comparativ cu e^{-30t} .

Polul lent $p_1 = -2$ este **dominant** față de cel rapid $p_2 = -30$.

Pentru $|s|$ suficient de mic (t suf. de mare), $|s + 30| \cong 30$.

În $G(s)$ se poate păstra numai $p_1 = -2$; se obține:

$$G(s) = \frac{60}{(s+2)(s+30)} \approx \frac{60}{(s+2)30} = \frac{2}{s+2}, \quad h(t) \approx (1 - e^{-2t})\sigma(t). \quad \blacksquare$$

7.5. Configurații cu doi poli dominanți

Se pot realiza, deliberat, configurații cu doi poli dominanți.

$$G(s) \cong \tilde{G}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (7.55)$$

$$p_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}), \quad 0 < \zeta < 1. \quad (7.56)$$

Se adoptă $\zeta \in (0,1)$ deoarece τ_s este minim pentru $\zeta \cong 0,707$.

Pentru un sistem dat se precizează indicii admisibili

$$\sigma_a, t_{sa}, t_{ca}.$$

Valorile lor curente trebuie să satisfacă condițiile:

$$\sigma \leq \sigma_a, \quad (7.57) \quad t_s \leq t_{sa}, \quad (7.58) \quad t_c \leq t_{ca}. \quad (7.59)$$

Ele implică localizarea adecvată a polilor dominanți (7.56).

1° Din $\sigma \leq \sigma_a$ și din $\sigma = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, $0 \leq \zeta < 1$, rezultă

$$\zeta \geq \zeta_a = \frac{|\ln \sigma_a|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \sigma_a}}. \quad (7.60) \quad \zeta_a \text{ este valoarea admisibilă.}$$

Se introduce parametrul $0 < \psi < \pi/2$ prin: $\cos \psi = \zeta$,
având valoarea admisibilă

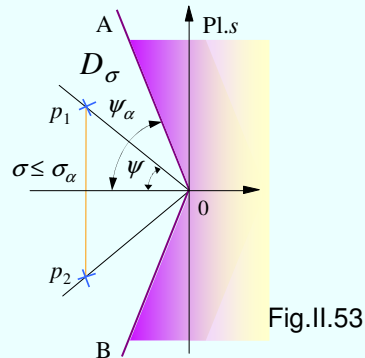
$$\cos \psi_a = \zeta_a = \frac{|\ln \sigma_a|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \sigma_a}}.$$

(7.60) este echivalentă cu:

$$\psi \leq \psi_a. \quad (7.63)$$

(7.63) cere ca polii (7.56)

să fie localizați în D_σ fig.II.53.



2° Din $t_s \leq t_{sa}$, conform cu $\begin{cases} \tau_s \cong 3/\zeta, & 0 < \zeta \leq 0,707 \\ \tau_s \cong 6\zeta, & \zeta > 0,707. \end{cases}$

pentru $\tau_s = \omega_n t_s$, se obțin respectiv inegalitățile:

$$(\omega_n \zeta) \geq (\omega_n \zeta)_a \cong 3/t_{sa}, \quad 0 < \zeta \leq 0,707,$$

$$(\omega_n \zeta) \geq (\omega_n \zeta)_a \cong 6\zeta^2/t_{sa}, \quad 0,707 < \zeta < 1.$$

$(\omega_n \zeta)_a$ – val. admis. a lui $(\omega_n \zeta)$.

$(\omega_n \zeta)_a = \alpha_{min}$ – rezerva de stab.

$(\omega_n \zeta) = \alpha$ – gradul de stab.

Polii (7.56) trebuie să fie

localizați în D_{ts} , fig.II.54.

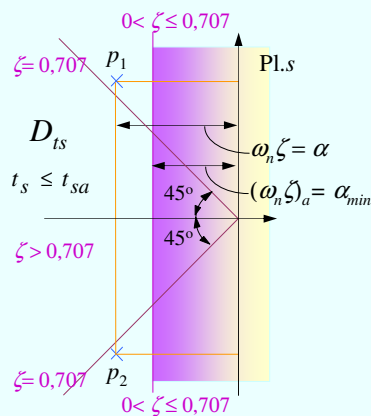


Fig.II.54

3° Din $t_c \leq t_{ca}$, conform cu $t_c \cong 1,8 / \omega_n$, $0,3 \leq \zeta \leq 0,8$,
se obține: $\omega_n \geq \omega_{na} = 1,8 / t_{ca}$, $0,3 \leq \zeta \leq 0,8$. (7.66)

ω_{na} este valoarea admisibilă a lui ω_n .

Din $p_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})$, $0 < \zeta < 1$ se obține:

$$\omega_n = |p_{1,2}| \geq \omega_{na} \quad (7.67)$$

deoarece $|\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}| = 1$.

Polii (7.56), cf. (7.66), (7.67),

trebuie să fie localizați

în domeniul D_{tc} , v. fig.II.55.

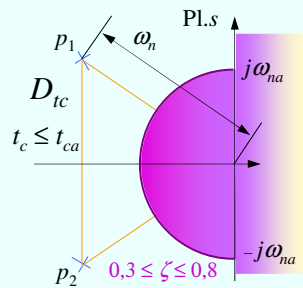


Fig.II.55

3° Polii $p_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})$, $0 < \zeta < 1$, (7.56)

trebuie să fie localizați în domeniul D_a din fig.II.56

(conform fig.II.53 – 55), lângă frontieră.

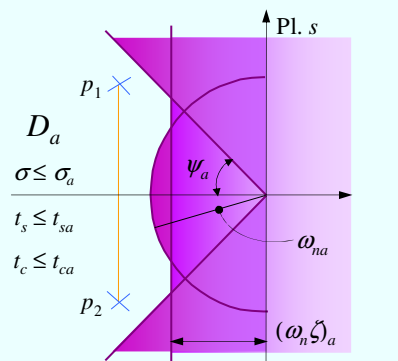


Fig.II.56

Capitolul III

PROPRIETĂȚILE SISTEMELOR AUTOMATE

1. Clasificarea sistemelor dinamice după structură

Prin **structură fundamentală** se înțelege o reuniune de elemente ale cărei proprietăți nu se regăsesc, ca atare, printre proprietățile elementelor componente.

Proprietățile unei structuri fundamentale aparțin în primul rând conexiunilor dintre elementele componente (*elemente de bază*), respectiv reuniunii structurate a elementelor și raporturilor dintre elementele de bază.

Exemplul 1.1

Circuitul « L, C » din fig.III.1 este o structură fundamentală.

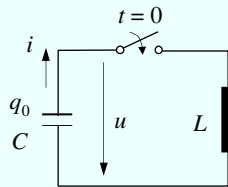


fig.III.1

$$L \frac{di}{dt} = -u, \quad i(0) = 0, \quad C \frac{du}{dt} = i, \quad u(0) = u_0 = \frac{q_0}{C},$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_n^2 u = 0, \quad u(0) = \frac{q_0}{C}, \quad u'(0) = \frac{i(0)}{C} = 0.$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad u(t) = \frac{q_0}{C} \cos \omega_n t, \quad t \geq 0.$$

Circuitul este oscilant, proprietate care nu rezidă în componentele L, C , luate separat, ci în conexiunea lor. ■

După prezența sau absența reacției se disting sisteme cu structură: **deschisă** respectiv **închisă**.

1.1. Sisteme cu structură deschisă

Structurile deschise nu conțin conexiuni «cu reacție».

O structură fundamentală deschisă minimală: fig.III.2:

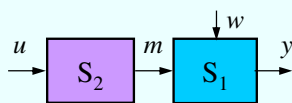


Fig.III.2

u – m. intrare; m – m. comandă;

w – perturbație; y – m. ieșire.

S_1 – **subsistemul principal**: $m \rightarrow y$.

S_2 – **subsistemul de comandă**: $u \rightarrow m$.

S_1 este dat. Se adaugă S_2 astfel ca să se realizeze $u \rightarrow y$.

Perturbația w modifică transferul $u \rightarrow y$.

Prin u se reduce efectul perturbației w asupra lui y .

Ansamblul se numește **sistem de comandă**.

Exemplul 1.2

Sistem de comandă – generator electric de cc, fig.III.3.

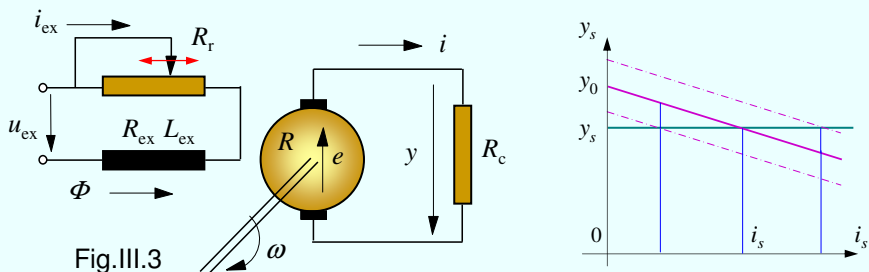


Fig.III.3

$$y_s = e_s - Ri_s,$$

$$\Phi_s = L_{ex}i_{ex},$$

$$y_s = y_0 - Ri_s,$$

$$e_s = k\omega_s\Phi_s,$$

$$i_{exs} = \frac{u_{exs}}{R_{ex} + R_r},$$

$$y_0 = \frac{k\omega_s L_{ex} u_{exs}}{R_{ex} + R_r}. \quad \blacksquare$$

Pentru reducerea, eliminarea sau întărirea efectului perturbației w asupra ieșirii y se introduce S_3 (fig.III.5).

Se realizează un sistem de comandă pe

principiul compensației (Poncelet).

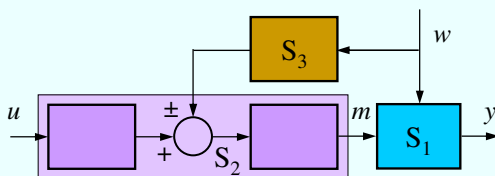


Fig.III.5

Exemplul 1.3

Sistem de comandă cu aplicarea principiului compensației
– generator electric cu compensare după curent, fig.III.6.

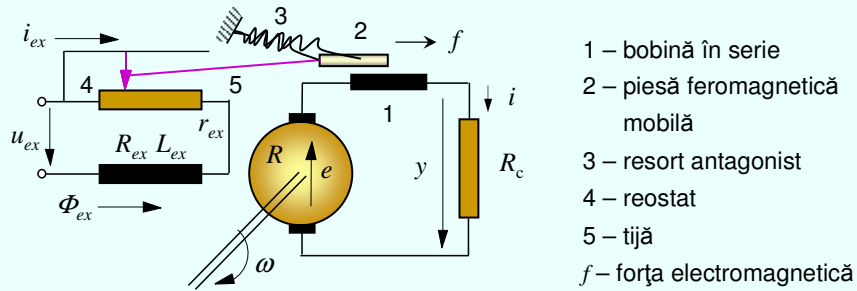


Fig.III.6

1.2. Sisteme cu structură închisă

Structurile închise conțin **conexiuni «cu reacție»**, fig. III.9.

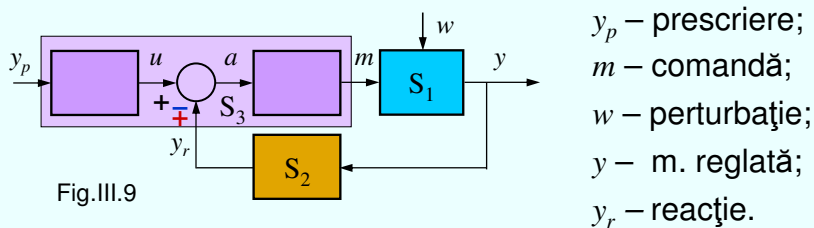


Fig.III.9

S_1 – **subsistemul principal**; S_2 – **subsistemul de reacție**;
 S_3 – **subsistemul decizional**.

În particular $a = u \mp y_r$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{" - " definește reacția negativă.} \\ \text{" + " definește reacția pozitivă.} \end{array} \right.$

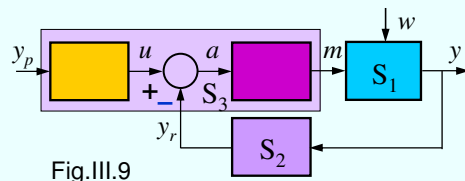


Fig.III.9

1° *Reacția negativă*

$a = u - y_r$
se numește **abaterea**
dintre u și y_r .

Sistemul automat funcționează pe **principiul abaterii** (principiul Watt): însăși existența unei variații a abaterii (oricare ar fi cauza) are ca efect evoluția sistemului automat în sensul diminuării sau chiar al anulării abaterii.

Are loc și o **stabilizare** a sistemului automat.

Se pot aplica simultan principiul abaterii și al compensației.

Exemplul 1.4

Sistem de comandă cu aplicarea principiului abaterii
– generator cu reglarea automată a tensiunii, fig.III.10.

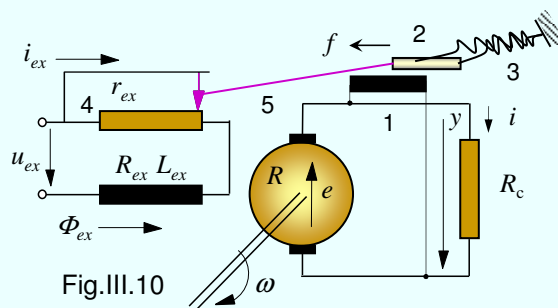


Fig.III.10

- 1 – bobină în paralel
- 2 – piesă feromagnetică mobilă
- 3 – resort antagonist
- 4 – reostat
- 5 – tijă
- f – forța electromagnetică

Principiile abaterii și compensației se pot combina folosind două bobine – în paralel și în serie cu indusul. ■

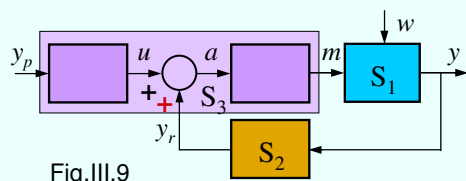


Fig.III.9

2° Reacția pozitivă

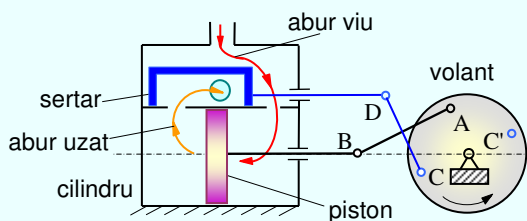
$$a = u + y_r$$

a nu este abatere.

Pot apărea oscilații întreținute sau neamortizate
– evoluție spre limita de stabilitate sau instabilitate.

Exemplul 1.5 Mașina cu vapori

Vezi [Motorul Otto](#)



AB – bielă-manivelă
CD – bielă-manivelă

fig.III.12

Exemplul 1.6 Oscilator electronic cu triodă

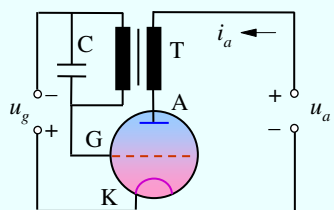


fig.III.13

- A – anod
- K – catod
- G – grilă
- T – transformator
- C – condensator
- u_a – tensiune anodică
- u_g – tensiune de grilă
- i_a – curenți anodic

Se pot formula următoarele caracterizări generale:

- *> **reacția negativă are efect stabilizant ;**
- *> **reacția pozitivă are efect destabilizant .**

2. Sisteme automate monovariabile

Un sistem automat monovariabil are mai multe mărimi de intrare, o mărime de ieșire și o reacție între ieșire și o intrare.

2.1. Schema bloc funcțională

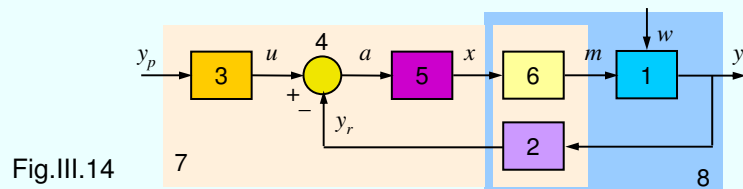


Fig.III.14

(1) instalația automatizată

(7) dispoz. de automatizare

(2) traductorul
 (3) elem. de prescriere
 (4) comparatorul
 (5) regulatorul
 (6) elem. de execuție

(8) partea fixată

M. Voicu, IA (II)

31

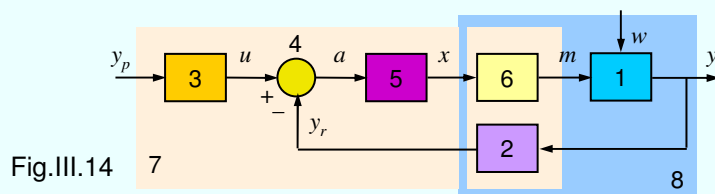


Fig.III.14

y_p – m. prescrisă

a – abaterea

u – m. prescrisă adaptată

x – m. de comandă

y – m. reglată

m – m. de execuție

y_r – m. de reacție

w – perturbația

Regulatorul (5) materializează **legea de reglare**.

(3), (4) și (5) constituie de regulă un modul constructiv.

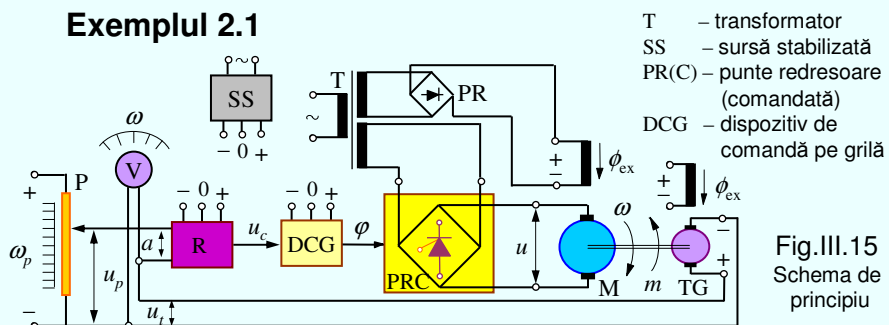
Operatorul ajustează y_p și parametrii regulatorului.

M. Voicu, IA (II)

C6 (34)

32

Exemplul 2.1



T – transformator
 SS – sursă stabilizată
 PR(C) – punte redresoare (comandată)
 DCG – dispozitiv de comandă pe grilă

Fig.III.15
 Schema de principiu

Inst. automatizată: motor el. de cc (M), v. exemplele II.2.1 – II.2.3

Traductor de turație: tahogenerator (TG): $u_t = k_t \omega$

Element de prescriere: potențiomtru (P): $u_p = k_p \omega_p$

Comparator: P și TG conectate în opoziție: $a = u_p - u_t$

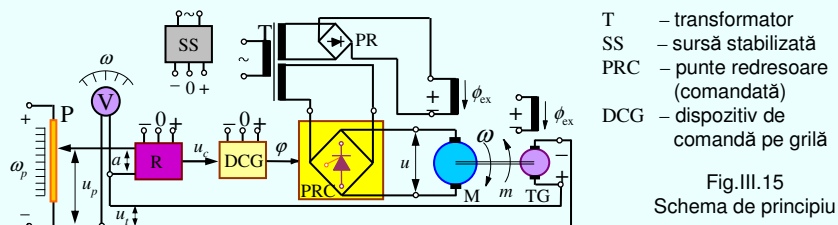
Regulator (R): de tip PID, v. cap. IV

Element de execuție: (DCG) + (PRC): $\phi = k_g u_c, u = k\phi$.

M. Voicu, IA (II)

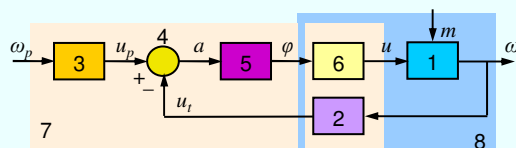
C6 (34)

33



T – transformator
 SS – sursă stabilizată
 PRC – punte redresoare (comandată)
 DCG – dispozitiv de comandă pe grilă

Fig.III.15
 Schema de principiu



Schema bloc funcțională

1. Inst. automatizată: motor el. de cc (M), v. exemplele II.2.1 – II.2.3

2. Traductor de turație: tahogenerator (TG): $u_t = k_t \omega$

3. Element de prescriere: potențiomtru (P): $u_p = k_p \omega_p$

4. Comparator: P și TG conectate în opoziție: $a = u_p - u_t$

5. Regulator (R): de tip PID, v. cap. IV

6. Element de execuție: (DCG) + (PRC): $\phi = k_g u_c, u = k\phi$. ■

M. Voicu, IA (II)

C6 (34)

34