

5. Polii și zerourile funcției de transfer

5.1. Răspunsul la semnalul exponențial

Fie sistemul

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (1.12), \quad G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad \text{cu poli simpli.}$$

$$\text{Se aplică : } u(t) = u_0 e^{\lambda t} \sigma(t), \quad U(s) = \frac{u_0}{s - \lambda}. \quad (5.2)$$

Se utilizează în (1.12) teorema dezvoltării și rezultă:

$$y(t) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t} \right)}_{\text{c. regim tranzitoriu}} \sigma(t) + \underbrace{d e^{\lambda t}}_{\text{c. regim permanent}} \sigma(t), \quad (5.3)$$

$$c_k = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k) G(s) U(s), \quad k = \overline{1, n}, \quad d = \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) G(s) U(s) = G(\lambda) u_0.$$

$$\begin{aligned} c_k &= \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k) G(s) U(s) = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k) \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (s - p_j)} \frac{u_0}{s - \lambda} = \\ &= \frac{b_m \prod_{i=1}^m (p_k - z_i)}{a_n \prod_{j=1, j \neq k}^n (p_k - p_j)} \frac{u_0}{p_k - \lambda}, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} d &= \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) G(s) U(s) = \lim_{s \rightarrow \lambda} (s - \lambda) \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (s - p_j)} \frac{u_0}{s - \lambda} = \\ &= \frac{b_m \prod_{i=1}^m (\lambda - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (\lambda - p_j)} u_0 = G(\lambda) u_0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Intrare: $u(t) = u_0 e^{\lambda t} \sigma(t)$ (5.1)

Leșire: $y(t) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t} \right) \sigma(t)}_{y_T(t)} + \underbrace{d e^{\lambda t} \sigma(t)}_{y_P(t)},$ (5.3)

componenta de regim tranzitoriu

componenta de regim permanent

$y_T(t)$ – determinată de:
 $e^{p_k t}$ (p_k sunt polii lui $G(s)$),
 c_k – dependenți de zerourile,
și polii lui $G(s)$ și $U(s)$.
 $y_T(t)$ – reflectă modificarea
echilibrului intern de către $u(t)$.

$y_P(t)$ – determinată de:
 $e^{\lambda t}$ (introdusă de $u(t)$!) și
 d – dependent de zerourile
și polii lui $G(s)$.
 $y_P(t)$ – corespunde intrării;
 $y_P(t)$ – **similară** cu intrarea $u(t)$.

$y_T(t)$ din (5.3) are forma:

$$y_T(t) = \left(\sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t} \right) \sigma(t).$$

$y_P(t)$ din (5.3) are forma:

$$y_P(t) = d e^{\lambda t} \sigma(t), \quad \text{cu}$$

$$d = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (\lambda - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (\lambda - p_j)} u_0 = G(\lambda) u_0, \quad y_P(t) = G(\lambda) u_0 e^{\lambda t} \sigma(t).$$

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t} \sigma(t), \quad (5.1)$$

$$y_P(t) = G(\lambda) u(t), \quad (5.6)$$

Observația 5.2. $y_T(t)$ este indezirabilă, inerentă și inevitabilă.

$y_P(t)$, fiind similară cu $u(t)$, este rațiunea de a fi a sistemului.

^ $y_T(t) \rightarrow 0$ respectiv, $y(t) = y_T(t) + y_P(t) \rightarrow y_P(t)$, pentru $t \rightarrow +\infty$,

↔ toți polii lui $G(s)$ sunt în $\{\text{Re } s < 0\}$. ◦

5.2. Transferul "rezonant"

Pentru $\forall |u_0| < +\infty$ și $\lambda = p_\rho, \rho = \overline{1, n}$, în $u(t) = u_0 e^{\lambda t} \sigma(t)$, (5.1)

$$\text{din } G(\lambda) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (\lambda - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (\lambda - p_j)} \quad \cdot \quad |G(p_\rho)| = +\infty, \quad \rho = \overline{1, n}, \quad (5.8)$$

$$|y_p(t)| = \underbrace{|G(p_\rho)|}_{=+\infty} |u(t)|, \quad \rho = \overline{1, n}. \quad (5.11)$$

(5.8) – **rezonanța** pe frecvența proprie p_ρ , inoculabilă prin $u(t)$.

Este o extensie a cazului rezonanței propriu-zise: $\lambda = p_\rho = j\omega_\rho$.

Transferul rezonant este definit de (5.8), respectiv de anularea numitorului lui $G(s)$ pentru $s = p_\rho, \rho = \overline{1, n}$.

Frecvențele proprii sunt **polii** lui $G(s)$.

5.3. Transferul blocat

Pentru $\forall u_0 \neq 0$ și $\lambda = z_\alpha, \alpha = \overline{1, m}$, în $u(t) = u_0 e^{\lambda t} \sigma(t)$, (5.1)

$$\text{din } G(\lambda) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (\lambda - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (\lambda - p_j)} \quad \cdot \quad G(z_\alpha) = 0, \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad (5.13)$$

$$u(t) \neq 0, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (5.14) \quad y_p(t) = G(z_\alpha)u(t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, m}. \quad (5.15)$$

(5.14), (5.15) – **transferul blocat** intrare-ieșire.

Este o "**antirezonanță**" pe frecvențele

$$\lambda = z_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, m}, \quad \text{inoculabile } u(t).$$

$z_\alpha, \alpha = \overline{1, m}$, sunt **zerourile de transmisie** ale lui $G(s)$.

6. Stabilitatea intrare-ieșire

6.1. Definiția stabilității intrare-ieșire

În $y(t) = y_T(t) + y_P(t)$,

regimul permanent ($y_P(t)$) este rațiunea de a fi a sistemului;

regimul tranzitoriu ($y_T(t)$) este indezirabil, inerent și inevitabil.

$y_P(t)$ și $y_T(t)$ coexistă cronologic.

Este de dorit ca :

pentru **orice**: $|u(t)| \leq K < +\infty, K > 0, t \in \mathbf{R}_+, \quad (6.1)$

să se obțină: $|y_P(t)| < +\infty, t \in \mathbf{R}_+, \quad (6.2)$

și simultan: $\lim_{t \rightarrow \infty} y_T(t) = 0. \quad (6.3)$

M. Voicu, IA (II)

C5 (35)

7

În plus, se dorește ca:

$$|y_P(t)| < +\infty, t \in \mathbf{R}_+, \quad (6.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_T(t) = 0, \quad (6.3)$$

astfel încât de la un $t_s > 0$, finit și nu foarte mare, să aibă loc:

$$y_T(t) \cong 0, t \geq t_s > 0, \quad (6.4)$$

$$y(t) = y_T(t) + y_P(t) \cong y_P(t), t \geq t_s > 0. \quad (6.5)$$

Momentul t_s este **durata regimului tranzitoriu**.

Se definește în mod convențional pe baza inegalității:

$$|y_T(t)| \leq \varepsilon, t \geq t_s > 0; \quad (6.6)$$

ε este eroarea pentru aproximarea (6.5).

M. Voicu, IA (II)

C5 (35)

8

Problema

$$\forall |u(t)| \leq K < +\infty, t \in \mathbf{R}_+, \quad (6.1)$$

$$\exists |y_P(t)| < +\infty, t \in \mathbf{R}_+, \quad (6.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_T(t) = 0, \quad (6.3)$$

este de BIBO-stabilitate (BIBO=*bounded input-bounded output*).

Cf. Obs. 5.2., BIBO-stabilit. $\Leftrightarrow G(s)$ are toți polii în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$.

Definiția 1

Sistemul (1.12) se numește **BIBO - stabil** dacă pentru orice intrare $u(t)$, mărginită cf. (6.1), sistemul are o ieșire mărginită:

$$|y(t)| < +\infty, t \in \mathbf{R}_+. \quad (6.7)$$

În caz contrar sistemul se numește **BIBO - instabil**. ◦

Exemplul 6.1

Fie a) $G(s) = \frac{1}{s^2 - s + 1}$, b) $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$.

Există $u(t)$ mărginit pentru care $y(t)$ este nemărginit?

a) Polii sistemului sunt:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pentru $u(t) = \sigma(t)$, mărginit, se obține:

$$h(t) = \left[1 - 2e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) \right] \sigma(t); \quad h(t) \text{ este nemărginit!}$$

b) Polii sistemului sunt:

$$p_{1,2} = \pm j; \text{ coeficientul lui } j \text{ este pulsația naturală } \omega_n = 1.$$

Pentru $u(t) = \sigma(t)$, mărginit, se obține:

$$h(t) = (1 - \cos t) \sigma(t); \quad h(t) \text{ este mărginit.}$$

Pentru $u(t) = \sin t \sigma(t)$, mărginit, se obține:

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \sigma(t); \quad y(t) \text{ este nemărginit!}$$

Are loc o rezonanță:

pulsația lui u , $\omega = 1$, coincide cu

pulsația naturală a sistemului, $\omega_n = 1$. \circ

6.2. Caracterizări ale BIBO-stabilității

Fie sistemul:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (1.12) \quad y(t) = \int_0^t g(\theta)u(t-\theta)d\theta \sigma(t). \quad (3.16)$$

Teorema 1

Sistemul (1.12) este **BIBO - stabil** dacă și numai dacă

$$\int_0^{+\infty} |g(\theta)|d\theta < +\infty. \quad (6.8)$$

E . Suficiența

$g(t)$ este absolut integrabilă, respectiv are loc (6.8).

Folosind (3.16), pentru $\forall u(t)$, cu $|u(t)| \leq K < +\infty$, se obține:

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t |g(\theta)||u(t-\theta)|d\theta \leq K \int_0^t |g(\theta)|d\theta \leq \\ &\leq K \left(\int_0^t |g(\theta)|d\theta + \int_t^{+\infty} |g(\theta)|d\theta \right) = K \int_0^{+\infty} |g(\theta)|d\theta < +\infty. \end{aligned}$$

Necesitatea

Sistemul este BIBO-stabil. Se presupune prin absurd că

$$\int_0^{+\infty} |g(\theta)| d\theta < +\infty \quad (6.8)$$

nu are loc, respectiv pentru $\forall M > 0, \exists t_M > 0$ astfel încât:

$$\int_0^{t_M} |g(\theta)| d\theta \geq M. \quad (6.8 \text{ bis})$$

Se aplică $u(t) = \text{sgn } g(t_M - t)$ sistemului:

$$y(t) = \int_0^t g(\theta) u(t - \theta) d\theta \sigma(t). \quad (3.16)$$

În valoare absolută, pentru $t = t_M$, cu (6.8 bis), se obține:

$$|y(t_M)| = \left| \int_0^{t_M} g(\theta) u(t_M - \theta) d\theta \right| = \left| \int_0^{t_M} g(\theta) \text{sgn } g(\theta) d\theta \right| = \int_0^{t_M} |g(\theta)| d\theta \geq M,$$

fapt contrar ipotezei. Rezultă că (6.8) este adevărată. ◦

Teorema 2

Sistemul (1.12) este **BIBO-stabil** dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer $G(s)$ sunt situați în $\{\text{Re } s < 0\}$.

E . $G(s)$ are polii $p_i, i = \overline{1, r}$, de multiplicit. q_i . De la 3.2.e, f se știe:

$$g(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t}, t > 0.$$

Condiția din (6.8) T.1: $\int_0^{+\infty} |g(\theta)| d\theta < +\infty \Leftrightarrow \text{Re } p_i < 0, i = \overline{1, r}$.

Cf. T.1 sistemul este BIBO-stabil $\Leftrightarrow \text{Re } p_i < 0, i = \overline{1, r}$. ◦

Teorema 3

Sistemul (1.12) este **BIBO-stabil** dacă și numai dacă

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) \text{ există și este finită. } \circ$$

6.3. O condiție necesară de BIBO - stabilitate

$G(s)$ are la numitor polinomul:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (6.9)$$

Polinomul monic echivalent (al polilor) are expresia:

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n, \quad (6.10)$$

$$\alpha_i = a_{n-i} / a_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_n \neq 0. \quad (6.11)$$

Definiția 2

Un polinom cu toate zerourile în $\{\operatorname{Re} s < 0\}$ se numește **hurwitzian**.

Teorema 4

Sistemul (1.12) este BIBO-stabil dacă și numai dacă $P(s)$, respectiv $\Delta(s)$ sunt hurwitziene.

Teorema 5

O condiție necesară ca $\Delta(s)$ să fie hurwitzian este ca

$$\alpha_i > 0, i = \overline{1, n}. \quad (6.12)$$

$$\mathbf{E} . \quad \Delta(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = \prod_{i=1}^{n_1} (s + \beta_i) \prod_{k=1}^{n_2} (s^2 + 2\gamma_k s + \gamma_k^2 + \delta_k^2), \quad (\star)$$

$$p_i = -\beta_i < 0, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad p_k = -\gamma_k \pm j\delta_k, \quad -\gamma_k < 0, \quad k = \overline{1, n_2}, \quad n_1 + 2n_2 = n.$$

Cu $\beta_i > 0, \gamma_k > 0$, făcând produsele în (\star) , rezultă (6.12).

Exemplul 6.3

$\Delta(s) = s^3 + s^2 + s + 6$ cu $p_1 = -2, p_{2,3} = (1 \pm \sqrt{11})/2$ este nehurwitzian.

Teorema 6 (o condiție suficientă de BIBO-instabilitate)

$\Delta(s)$ cu cel puțin un coeficient nepozitiv este nehurwitzian.

6.4. Criteriul Hurwitz

Fie matricea \mathbf{H}_n (*Hurwitz*)

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \alpha_7 & \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

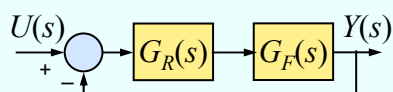
$$\alpha_k = 0, k > n.$$

Teorema 7 (Hurwitz)

$\Delta(s)$ este hurwitzian dacă și numai dacă

$$\det \mathbf{H}_k > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (6.14)$$

Exemplul 6.4



$$G_F(s) = \frac{8}{2s^2 + 34s + 1},$$

$$G_R(s) = k + \frac{1}{\tau s}; \quad k \geq 0, \tau > 0.$$

Domeniul de BIBO-stabilitate în planul (k, τ) ?

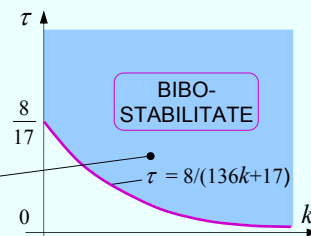
$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \frac{4(k s + 1/\tau)}{s^3 + 17s^2 + (1/2 + 4k)s + 4/\tau} \quad \Delta(s)$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4/\tau & 1/2 + 4k & 17 \\ 0 & 0 & 4/\tau \end{bmatrix}.$$

$$\det \mathbf{H}_1 = 17 > 0,$$

$$\det \mathbf{H}_2 = 17(1/2 + 4k) - 4/\tau > 0,$$

$$\det \mathbf{H}_3 = (4/\tau) \det \mathbf{H}_2 > 0.$$



BIBO-stabil $\Leftrightarrow \tau > 8/(136k + 17).$

6.5. Criteriul Routh

Se asociază polinomului $\Delta(s)$ **schema Routh**:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 s^n & r_{01} & r_{02} & r_{03} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 s^{n-1} & r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 s^{n-2} & r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 s^{n-i+2} & r_{i-21} & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{i-2j} & r_{i-2j+1} & \dots \\
 s^{n-i+1} & r_{i-11} & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{i-1j} & r_{i-1j+1} & \dots \\
 s^{n-i} & r_{i1} & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{ij} & r_{ij+1} & \dots \\
 \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 s^0 & r_{n1} & & & & & & &
 \end{array} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
 r_{01} &= 1, r_{02} = \alpha_2, r_{03} = \alpha_4, \dots \\
 r_{11} &= \alpha_1, r_{12} = \alpha_3, r_{13} = \alpha_5, \dots, r_{ij} = -\frac{1}{r_{i-11}} \begin{vmatrix} r_{i-21} & r_{i-2j+1} \\ r_{i-11} & r_{i-1j+1} \end{vmatrix}, i = \overline{2, n}, \\
 & j = \overline{1, 2}, \dots \end{aligned} \tag{6.16}$$

Teorema 9 (Routh)

$\Delta(s)$ este **hurwitzian** dacă și numai dacă $r_{i1} > 0, i = \overline{1, n}$.

6.6. Stabilitatea relativă

$h(t)$ arată calitățile de stabilitate adică *apropierea* de instab.

Se evaluează prin abaterile lui $h(t)$ față de **regimul staționar**:

$$\bar{h} = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{b_0}{a_0}.$$

Abaterile lui $h(t)$ sunt cu atât mai mari cu cât polii lui $G(s)$

sunt mai aproape de axa imaginară.

Trebuie să se asigure o

rezervă de BIBO-stabilitate.

Aceasta este o distanță minimă

$$\alpha_{min} > 0$$

a polilor față de axa imaginară,

conform fig.II.39.

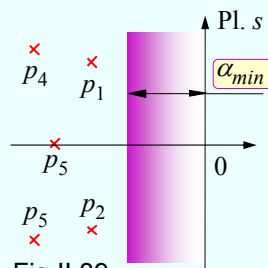


Fig.II.39

Abateri mici față de \bar{h} înseamnă o calitate mai bună a lui $h(t)$.
 Se previne pierderea BIBO-stabilității atunci când unii poli
 se mișcă spre axa imaginară sau sunt cunoscuți aproximativ.
 Polii lui $G(s)$ sunt în $\{\text{Re } s < -\alpha_{min}\} \Leftrightarrow \Delta(z - \alpha_{min})$ este hurwitzian.

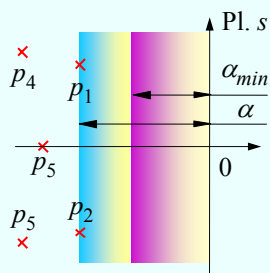


Fig.II.39

Gradul de BIBO-stabilitate este distanța α dintre axa imaginară și polul cel mai apropiat – fig.II.39.

Se impune $\alpha \geq \alpha_{min}$ deoarece $\Delta(s)$ nu se cunoaște exact sau se modifică în timp.

α_{min} și α definesc **BIBO-stabilitatea relativă**.

6.7. Domenii parametrice de BIBO - stabilitate

- Este necesar să se știe limitele valorilor parametrilor pentru care se asigură rezerva de stabilitate α_{min} .
- Există parametri care se modifică sub influența mediului și parametri **ajustabili** (de către operator).
- Ecuațiile: $\alpha_n = 0, \det \mathbf{H}_{n-1} = 0$ (6.19)
 reprezintă frontiera dintre domeniile de BIBO-stabilitate și de BIBO-instabilitate în spațiul parametrilor.
- Natura unuia dintre domenii se află cu c. Hurwitz (Routh).
- Ecuațiile (6.19) se aplică și pentru $\Delta(z - \alpha_{min})$.
- Se determină domeniul de rezervă de BIBO-stabilitate α_{min} .

7. Corelația dintre calitatea răspunsului indicial și configurația poli - zerouri

7.1. Indici de calitate ai răspunsului indicial

Conform plasării polilor și zerourilor:

a_1) Sisteme BIBO-stabile; toți polii în $\{\text{Re } s < 0\}$

{	a_{11}) și toate zerourile în $\{\text{Re } s < 0\}$; sisteme de defazaj minim ; a_{12}) și există zerouri în $\{\text{Re } s \geq 0\}$; sisteme de defazaj neminim .
---	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

a_2) Sisteme BIBO-instabile; există polii în $\{\text{Re } s \geq 0\}$.

Sistemele uzuale sunt de tipul a_{11} .

Răspunsul indicial poate fi oscilatoriu amortizat sau aperiodic.

M. Voicu, IA (II)

C5 (35)

23

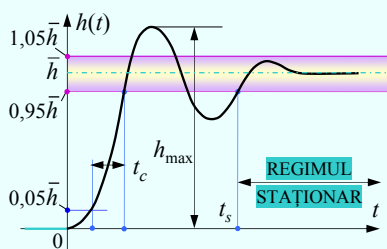


Fig.II.41: $h(t)$ oscilatoriu amortizat

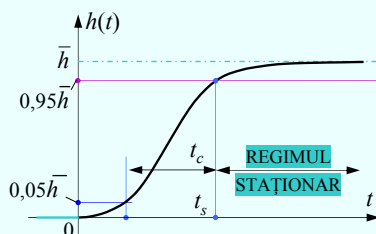


Fig.II.42: $h(t)$ aperiodic

Indici de calitate

Suprareglarea

$$\sigma = (h_{\max} - \bar{h}) / \bar{h}, \quad \sigma\% = \sigma 100. \quad (7.1)$$

Durata regimului tranzitoriu: t_s

$$t \geq t_s, \quad 0,95\bar{h} \leq h(t) \leq 1,05\bar{h}. \quad (7.2)$$

Pentru $t \geq t_s$ – regimul staționar.

Durata de creștere: t_c

$h(t)$ crește de la $0,05\bar{h}$ la $0,95\bar{h}$.

Rapiditatea lui $h(t)$: $1/t_c$

Pt. $h(t)$ aperiodic se folosesc t_s și t_c .

M. Voicu, IA (II)

C5 (35)

24

7.2. Elemente de transfer tipice

- 1 a) Elementul proporțional (P)
- 4 b) Elementul de întârziere de ordinul 1 (T1)
- 5 c) Elementul de întârziere de ordinul 2 (T2)
- 2 d) Elementul integrator (I)
- 3 e) Elementul derivator (D)
- 6 f) Elementul cu timp mort

Aceste elemente sunt prezentate în continuare
în următoarea succesiune: a, d, e, b, c, f.

1 a) Elementul proporțional (P)

$$G(s) = K, \quad H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{K}{s}, \quad h(t) = K\sigma(t).$$

Exemple: sisteme disipative

ELECTRIC	REZISTENȚA ELECTRICĂ	R	$i = \frac{1}{R}u$
MECANIC	COEFICIENTUL DE FRECARE	K_f	$f = K_f v$
			$c = K_f \omega$
FLUIDIC	REZISTENȚA FLUIDICĂ	R_f	$q = \frac{1}{R_f} p$
TERMIC	REZISTENȚA TERMICĂ	R_t	$q = \frac{1}{R_t} \theta$

2 d) Elementul integrator (I)

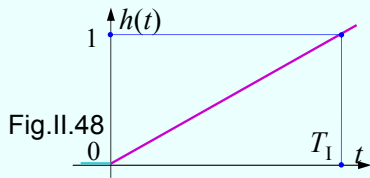


Fig.II.48

$$G(s) = \frac{1}{T_1 s}, \quad T_1 > 0, \quad (7.34)$$

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{T_1 s^2},$$

$$h(t) = \frac{1}{T_1} t \sigma(t). \quad (7.35)$$

T_1 – **timpul de integrare** $h(T_1) = \sigma(T_1) = 1$

$$Y(s) = \frac{1}{T_1 s} U(s), \quad y(t) = \frac{1}{T_1} \int_0^t u(\tau) d\tau. \quad (7.36)$$

Integrarea se extinde pe un interval: **operație globală** .

$\dot{y}(t) = \frac{1}{T_1} u(t)$. Viteza ieșirii este proporțională cu intrarea.

Așadar $u(t) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = 0$, dar nu în mod necesar și $y(t) = 0$.

Exemple

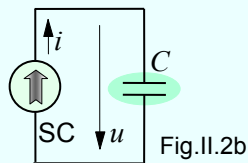
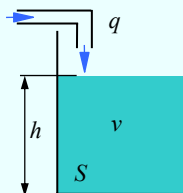


Fig.II.2b

Sistem: capacitate electrică

$$C \frac{du}{dt} = i(t), \quad (1.2b)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau, \quad U(s) = \frac{1}{T_1 s} I(s), \quad T_1 = C.$$



Sistem: capacitate fluidică (rezervor de lichid)

$$v_2 - v_1 = \Delta v = q \Delta t, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = q,$$

$$\frac{dv}{dt} = q, \quad v(t) = \int_0^t q(\theta) d\theta. \quad v = Sh,$$

S – arie, q – debit,
 v – volum, h – nivel.

$$h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t q(\theta) d\theta, \quad H(s) = \frac{1}{T_1 s} Q(s), \quad T_1 = S. \quad \circ$$

Obs. $u(\tau)=0, \tau \in [t_1, t_2]$, nu implică $y(\tau)=0, \tau \in [t_1, t_2]$.

Exemplu

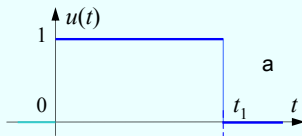
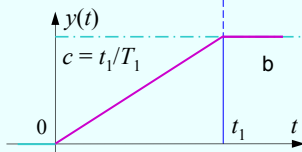


Fig.II.49

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t. \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{1}{T_1} \int_0^t u(\tau) d\tau. \quad (7.36)$$



$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t/T_1, & 0 \leq t < t_1, \\ t_1/T_1, & t_1 \leq t. \end{cases}$$

Are loc $y(t) = c = t_1/T_1 \neq 0, t \geq t_1$, deși $u(t) = 0$ pentru $t \geq t_1$. ◦

Exemplu
(continuare)

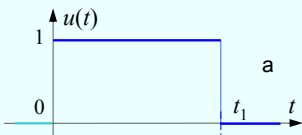
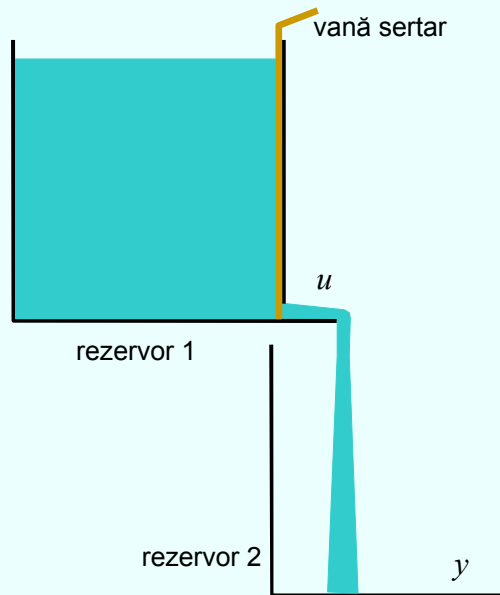
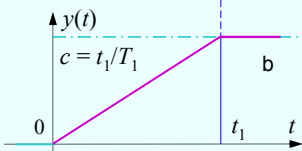


Fig.II.49



Exemplul 7.4

Servomotorul electric este un motor cf. ex. 2.1, 2.3.

Intrarea u – tensiunea u pe rotor; ieșirea y – unghiul axului ψ .

Între ω (viteza unghiulară, v. ex.2.1) și ψ există relațiile:

$$\psi(t) = k \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad \Psi(s) = \frac{k}{s} \Omega(s) \quad (k - \text{rap. transm.}).$$

Cf. ex. 2.3, pentru $M(s) = 0$, rezultă:

F. de transfer $\Omega(s) \Leftrightarrow \Psi$

F. de transfer $U(s) \Leftrightarrow \Omega(s)$

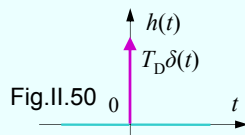
$$G_{sm}(s) = \frac{\Psi(s)}{U(s)} = \frac{k}{s} \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}$$

Pentru $L \cong 0$ și $J \cong 0$, realizabile prin construcție, se obține:

$$G_{sm}(s) \cong \frac{1}{T_1 s}, \quad T_1 = \frac{k_1 k_2 + R k_3}{k_2 k}$$

În primă aproximație servomotorul este un **integrator**. ◦

3 e) Elementul derivator (D) $G(s) = T_D s, \quad T_D > 0, \quad (7.37)$



$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = T_D$$

$$h(t) = T_D \delta(t). \quad (7.38)$$

y – proporțional cu viteza lui u . $y(t) = T_D \dot{u}(t)$. (7.39)

Pt. orice $u(t) = \text{const} \neq 0$ rezultă $y(t) = 0$. Transferul este **blocat**.

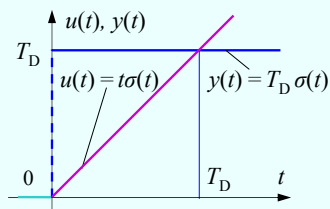


Fig.II.51

Pt. intrare **rampă unitară**:

$$u(t) = t \sigma(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = T_D D[t \sigma(t)] = T_D [\sigma(t) + \underbrace{t \delta(t)}_{=0}] = T_D \sigma(t),$$

$$y(T_D) = T_D.$$

T_D este **timpul de derivare**

Exemple

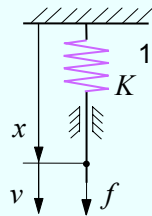


Fig.II.1c

Sistem: resort mecanic

$$f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (1.1c) \quad v(t) = \frac{1}{K} \frac{df(t)}{dt}.$$

$$V(s) = T_D s F(s), \quad T_D = \frac{1}{K}.$$

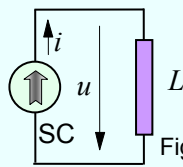


Fig.II.2c

Sistem: inductanță electrică

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad (1.2c)$$

$$U(s) = T_D s I(s), \quad T_D = L.$$

4 b) Elementul de întârziere de ordinul 1 (T1)

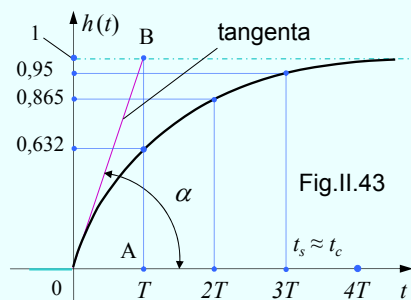


Fig.II.43

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}, \quad T > 0, \quad (7.4)$$

$$p_1 = -\frac{1}{T} < 0 \quad \text{polul lui } G(s).$$

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s(Ts+1)},$$

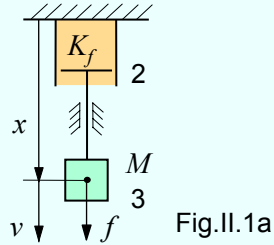
$$h(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \sigma(t). \quad (7.5)$$

T – constanta de timp

$$\begin{aligned} Dh(t) &= D[(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \sigma(t)] = [D(1 - e^{-\frac{t}{T}})] \sigma(t) + (1 - e^{-\frac{t}{T}}) [D\sigma(t)] = \\ &= \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \sigma(t) - (1 - 1) \delta(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \sigma(t), \quad h'(t) \equiv Dh(t) \equiv g(t). \end{aligned}$$

$$\text{tg } \alpha = h'(0) = \frac{1}{T}. \quad \text{În } \Delta OAB: AB = 1, OA = T. \quad t_s \approx 3T, t_c \approx t_s.$$

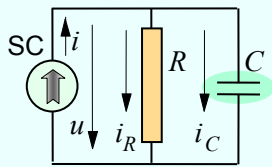
Exemple



Sistem: amortizor (2) – masă inertă (3)

$$M \frac{dv}{dt} + K_f v = f(t) \quad (1.1a)$$

$$V(s) = \frac{k}{Ts+1} F(s), \quad T = \frac{M}{K_f}, \quad k = \frac{1}{K_f}.$$



Sistem: rezistență (R) – capacitate (C)

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u = i(t) \quad (1.2a)$$

$$U(s) = \frac{k}{Ts+1} I(s), \quad T = RC, \quad k = R. \quad \circ$$