3. Răspunsul la impulsul Dirac

3.1. Definiţie

Se aplică imp. Dirac: $u(t) = \text{¢}(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \text{¢}(t)dt = 1,$ (3.1)

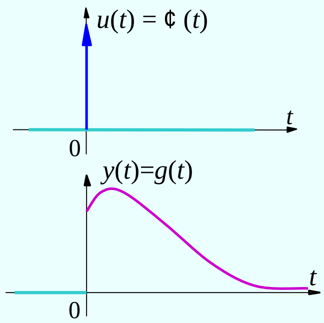


Fig.II.33

sistemului: $Y(s) = G(s)U(s)$. (1.12)

$U(s) = \mathscr{L}\{\text{¢}(t)\} = 1.$ (3.2)

Răspunsul este: $Y(s) = G(s)$. (3.3)

$G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}, \; g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}.$ (3.4)

$y(t) = g(t)$ (3.5)

Definiţia 1
Răspunsul (3.5) se numeşte ***răspunsul la impulsul Dirac***. ■

3.2. Proprietăţi

a. Răspunsul la implusul Dirac are proprietatea:

$g(t) \equiv 0, \quad t < 0.$ REPAUS (3.6)

Principiul cauzalităţii: *cauza nulă produce efectul nul*.
Într-adevăr, $u(t) = \text{¢}(t) = 0 \; (t < 0)$ implică (3.6).

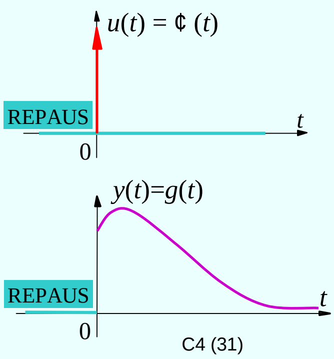


Fig.II.33

b. Răspunsul la impulsul Dirac este soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$a_n D^n g(t) + a_{n-1} D^{n-1} g(t) + \ldots + a_1 D g(t) + a_0 g(t) =$$

$$= b_m D^m ¢(t) + b_{m-1} D^{m-1} ¢(t) + \ldots + b_1 D ¢(t) + b_0 ¢(t),\ t \in \mathbf{R}. \qquad (3.7)$$

Se aplică transformarea Laplace:

$\mathscr{L}\{¢(t)\}$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) G(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) 1. \qquad (3.8)$$

Cu $G(s) = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$, rezultă că (3.8) este adevărată.

În general, $g(t)$ este o ***distribuţie*** sau o funcţie generalizată.

c. Pentru $t > 0$, $g(t)$ este o funcţie continuă, soluţie a ecuaţiei:

$$a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 g'(t) + a_0 g(t) = 0, \quad t > 0. \qquad (3.9)$$

Într-adevăr, pentru $t > 0$ şi $¢(t) = 0$, în ecuaţia:

$$a_n D^n g(t) + a_{n-1} D^{n-1} g(t) + \ldots + a_1 D g(t) + a_0 g(t) =$$

$$= b_m D^m ¢(t) + b_{m-1} D^{m-1} ¢(t) + \ldots + b_1 D ¢(t) + b_0 ¢(t),\ t \in \mathbf{R}, \quad (3.7)$$

derivatele generalizate se înlocuiesc cu derivatele obişnuite.

Se obţine imediat (3.9).

d. Pt. $m \le n-1$, $g(t)$ are cel mult o discontinuitate de speţa I la stânga lui $t = 0$ şi este continuă în rest.

Pentru $t \ne 0$, de la **a** şi **c** rezultă că $g(t)$ este continuă.

Pt. $m \le n-1$, $G(s) = \dfrac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$, este strict proprie.

$g(t)$ nu conţine impulsul Dirac şi derivatele sale (v. **f**).

Valorile $g^{(k)}(+0)$, $k = \overline{0, n-1}$, se obţin cu t. valorii iniţiale.

Pentru $m = n-1$ rezultă:

$$g(0) = g(+0) = \lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = \frac{b_{n-1}}{a_n}.$$

$$g'(+0) = \lim_{t\to 0} g'(t) = \lim_{s\to\infty} s[sG(s) - g(+0)] =$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\left[\boxed{s\frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}} - \boxed{\frac{b_{n-1}}{a_n}} \right] =$$

$$= \lim_{s\to+\infty} s\frac{\cancel{a_n b_{n-1} s^n} + a_n b_{n-2}s^{n-1} + \ldots - \cancel{a_n b_{n-1} s^n} - a_{n-1}b_{n-1}s^{n-1} - \ldots}{a_n(a_n s^n + \ldots + a_0)} =$$

$$= \frac{a_n b_{n-2} - a_{n-1}b_{n-1}}{a_n^2} = \begin{vmatrix} \dfrac{b_{n-1}}{a_n} & -1 \\ \dfrac{b_{n-2}}{a_n} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}.$$

....

$$g^{(n-1)}(+0)=\lim_{t\to 0} g^{(n-1)}(t)=\lim_{s\to\infty} s\left[s^{n-1}G(s)-g(+0)s^{n-2}-g'(+0)s^{n-3}-\ldots-g^{(n-2)}(+0)\right],$$

$$g^{(n-1)}(+0) = \begin{array}{r|ccccc|}
g(+0) \rightarrow & \frac{b_{n-1}}{a_n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
g'(+0) \rightarrow & \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
g^{(n-2)}(+0) \rightarrow & \frac{b_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \ldots & -1 \\
 & \frac{b_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n}
\end{array}.$$

$b_{n-1} \neq 0 \Rightarrow g(-0) \neq g(0) = g(+0)$; $b_{n-1} = 0 \Rightarrow g(-0) = g(0) = g(+0) = 0$.

$g(+0)$, $g'(+0)$,..., $g^{(n-1)}(+0)$ sunt cond. iniţiale ale ec. dif. (3.9).

Exemplul 3.1

Să se determine $g(t)$ pentru $G(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$.

$g''(t) + 3g'(t) + 2g(t) = 0, \quad t > 0;$

$s^2 + 3s + 2 = 0$, cu $p_1 = -2$, $p_2 = -1$.

Soluţia generală este: $g(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}, \quad t > 0.$

Din $g'(+0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$ se obţine şi $g(0) = g(+0) = 1$.

Pentru $t = +0$ în $g(t)$ şi $g'(t)$ rezultă $\begin{cases} g(+0) = C_1 + C_2 = 1 \\ g'(+0) = -2C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$

$C_1 = -1$, $C_2 = 2$ şi

$$g(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-t})\pm(t). \quad \blacksquare$$

e. Pentru $m \le n-1$, $g(t)$ se calculează şi cu t. dezvoltării.

Fie p_i, $i=\overline{1,r}$, polii distincţi, de multiplicitate $q_i \ge 1$,

ai lui $G(s)$, cu $\sum_1^r q_i = n$.

Raspunsul la impulsul Dirac, $g(t)$, se calculează cu:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t} \pm (t), \tag{3.10}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[(s-p_i)^{q_i} G(s) \right] \right\} \Bigg|_{s=p_i} ; i=\overline{1,r},\, j=\overline{1,q_i}. \tag{3.11}$$

f. Pentru $m \ge n$, $g(t)$ este o funcţie generalizată.

Ea conţine impulsul Dirac şi derivatele sale până la ordinul $m-n$ inclusiv.

Făcând împărţirea dintre polinoamele lui $G(s)$ rezultă:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = c_{m-n} s^{m-n} + \ldots + c_0 + \frac{b_{n-1}^1 s^{n-1} + \ldots + b_0^1}{a_n s^n + \ldots + a_0}, \tag{3.12}$$

$$G^1(s) = \frac{b_{n-1}^1 s^{n-1} + \ldots + b_0^1}{a_n s^n + \ldots + a_0}, \quad g^1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G^1(s)\}. \tag{3.14}$$

$$g(t) = c_{m-n} D^{m-n} \text{¢}(t) + \ldots + c_0 \text{¢}(t) + g^1(t). \tag{3.13}$$

$G^1(s)$ satisface **d** şi **e**. $g^1(t)$ se calculează cu (3.10), (3.11).

Exemplul 3.3

Pentru $G(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2}$ să se determine $g(t)$.

Se scrie:

$$G(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + 1 + \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}.$$

Cu rezultatul de la exemplul 3.1 se scrie:

$$g^1(t) = \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)\delta(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{G^1(s)\right\}.$$

În final se obţine:

$$G(s) = s + 1 + \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2},$$

$$g(t) = D\delta'(t) + \delta(t) + \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)\delta(t). \quad \blacksquare$$

g. Răspunsul la impulsul Dirac are proprietatea:

$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$ (3.15) $\Leftrightarrow$ $G(s)$ are toţi polii situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

$$g(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{\boxed{p_i t}}, \ t > 0. \quad (3.10)$$

(3.15) are loc $\Leftrightarrow$ în (3.10)

$$\mathrm{Re}\,\boxed{p_i} < 0, \ i = \overline{1, r}.$$

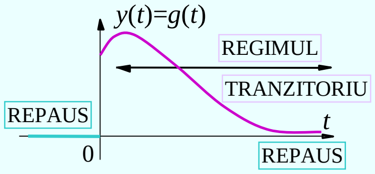


Fig.II.33

- Cf. (3.15) sistemul revine asimptotic la repaus.
- Trecerea de la o stare de repaus ($t < 0$) la cealaltă ($t = +\infty$) se face prin *regimul tranzitoriu* (fig. II.33).

3.3. Produsul de convoluţie

$Y(s) = G(s)U(s)$

$\mathscr{L}$

Teorema Borel

$\mathscr{L}^{-1}$

$$y(t) = (g * u)(t)±(t) = \int_0^t g(t-¯)u(¯)d¯\,±(t) = \int_0^t g(¯)u(t-¯)d¯\,±(t). \quad (3.16)$$

✽ produsul de convoluţie

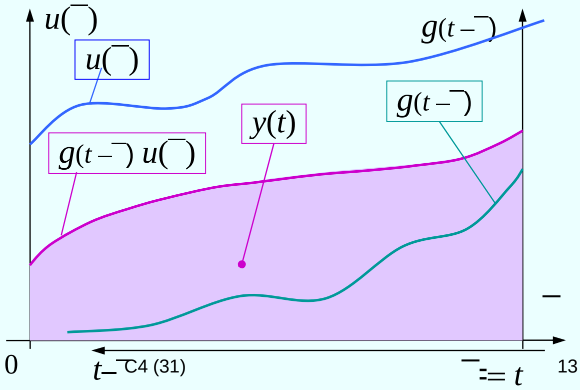


Fig.II.34
Transferul (3.16)

- $y(t)$ nu depinde numai de produsul

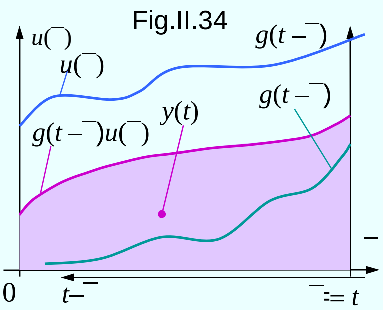
  $g(t - ¯)u(¯)$,

  ci de integrala sa pt. $¯ \in [0, t]$.
- $y(t)$ cumulează efectele cauzate de

  $u(¯), ¯ \in [0, t]$,

  în "istoria" procesului pe $[0, t]$.

Fig.II.34



Efectele sunt actualizate selectiv, respectiv sunt ponderate de $g(t– ¯), ¯ \in [0, t]$, fig. II.34.

- Sistemul dinamic are o "memorie" a acţiunilor lui $u(¯), ¯ \in [0, t]$, pe parcursul "istoriei" transferului intrare-ieşire.
- Răspunsul la imp. Dirac se mai numeşte şi ***funcţia pondere***.

Exemplul 3.4

Fie $g(t)=D\delta(t)+\delta(t)+\left(-e^{-2t}+2e^{-t}\right)\sigma(t)$ obţinut la exemplul 3.3.

Să se determine $y(t)$ pentru $u(t) = e^{\lambda t}\sigma(t)$.

Cu $g(t)$ cunoscut şi folosind (3.16) se scrie:

$$y(t)=(g*u)(t)\sigma(t)=(D\delta*u)(t)\sigma(t)+(\delta*u)(t)\sigma(t)+$$

$$+\left(-\int_0^t e^{-2(t-\tau)}e^{\lambda\tau}d\tau+2\int_0^t e^{-(t-\tau)}e^{\lambda\tau}d\tau\right)\sigma(t)=$$

$$=Du(t)+u(t)+\left[-\frac{1}{\lambda+2}\left(e^{\lambda t}-e^{-2t}\right)+\frac{2}{\lambda+1}\left(e^{\lambda t}-e^{-t}\right)\right]\sigma(t)=$$

$$=\delta(t)+\left(\frac{1}{\lambda+2}e^{-2t}-\frac{2}{\lambda+1}e^{-t}\right)\sigma(t)+\frac{\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+5}{\lambda^2+3\lambda+2}e^{\lambda t}\sigma(t).\ \blacksquare$$

4. Răspunsul indicial

4.1. Definiţie

Se aplică treapta unitară : $u(t)=\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geq 0,\end{cases}$ (4.1)

sistemului: $Y(s) = G(s)U(s)$. (1.12) $U(s)=\mathscr{L}\{\sigma(t)\}=\frac{1}{s}$. (4.2)

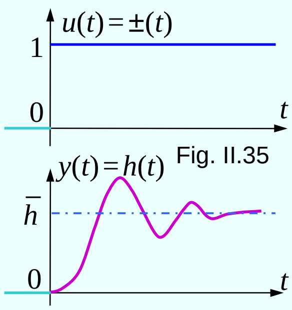


Fig. II.35

Răspunsul este: $Y(s)=H(s)=\frac{1}{s}G(s)$, (4.3)

$H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\},\ h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}$. (4.4)

$y(t)=h(t)=\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right)\sigma(t)$. (4.5)

$g(t)=Dh(t)$. (4.6)

Definiţia 1

Răspunsul (4.5) se numeşte ***răspunsul indicial***.

4.2. Proprietăţi

a. Răspunsul indicial are proprietatea:

$$h(t) \equiv 0, \quad t < 0. \quad \text{REPAUS} \qquad (4.7)$$

Principiul cauzalităţii: *cauza nulă produce efectul nul*.

Într-adevăr, $u(t) = ±(t) = 0 \ (t < 0)$ implică (4.7).

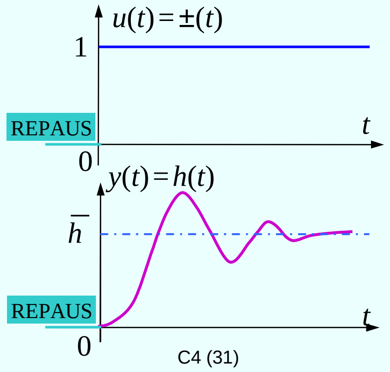


Fig. II.35

b. Răspunsul indicial este soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$a_n D^n h(t) + a_{n-1} D^{n-1} h(t) + \dots + a_1 D h(t) + a_0 h(t) =$$

$$= b_m D^m ±(t) + b_{m-1} D^{m-1} ±(t) + \dots + b_1 D ±(t) + b_0 ±(t), \ t \in \mathbf{R}. \qquad (4.8)$$

Se aplică transformarea Laplace: $\mathscr{L}\{±(t)\}$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) H(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) \frac{1}{s}. \qquad (4.9)$$

Cu $H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$

rezultă că (4.9) este adevărată.

În general $h(t)$ este o ***distribuţie*** sau o funcţie generalizată.

c. Pt. $t > 0$, $h(t)$ este continuă, soluţie a ecuaţiei diferenţiale:

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 h'(t) + a_0 h(t) = b_0, \quad t > 0. \qquad (4.10)$$

Pentru $t > 0$ rezultă:

$$\pm(t) = 1, \quad D^k \pm(t) = \pm^{(k)}(t) = 0, \qquad k = \overline{1, m}. \qquad (4.11)$$

Înlocuind (4.11) în

$$a_n D^n h(t) + a_{n-1} D^{n-1} h(t) + \ldots + a_1 D\, h(t) + a_0 h(t) =$$

$$= b_m D^m \pm(t) + b_{m-1} D^{m-1} \pm(t) + \ldots + b_1 D \pm(t) + b_0 \pm(t), \; t \in \mathbf{R}. \qquad (4.8)$$

şi trecând la derivatele obişnuite se obţine (4.10).

d. În cazul $m \le n$, $h(t)$ are cel mult o discontinuitate de speţa I la stânga punctului $t = 0$ şi este continuă în rest.

Pentru $t \ne 0$, $h(t)$ este continuă.

Pentru $m \le n$, $H(s)$ este strict proprie.

$h(t)$ nu conţine impulsul Dirac şi derivatele sale (v. **f**).

$h^{(k)}(+0)$, $k = \overline{0, n-1}$, se obţin cu teorema valorii iniţiale.

Pentru $m = n$ rezultă:

$$h(0) = h(+0) = \lim_{t \to 0} h(t) = \lim_{s \to \infty} s H(s) = \lim_{s \to \infty} s \frac{1}{s} G(s) =$$

$$= \lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{b_n}{a_n}.$$

$$h'(+0) = \lim_{t\to 0} h'(t) = \lim_{s\to\infty} s[sH(s) - h(+0)] =$$

$$= \lim_{s\to\infty} s[s\frac{1}{s}G(s) - h(+0)] =$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} - \frac{b_n}{a_n}\right] =$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\frac{a_n b_n s^n + a_n b_{n-1} s^{n-1} + \ldots - a_n b_n s^n - a_{n-1} b_n s^{n-1} - \ldots}{a_n(a_n s^n + \ldots + a_0)} =$$

$$= \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{a_n^2} = \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}.$$

....

$$h^{(n-1)}(+0) = \lim_{t\to 0} h^{(n-1)}(t) = \lim_{s\to\infty} s\left[s^{n-1}H(s) - h(+0)s^{n-2} - h'(+0)s^{n-3} - \ldots - h^{(n-2)}(+0)\right],$$

$$\begin{array}{r} h(+0) \rightarrow \\ h'(+0) \rightarrow \\ h^{(n-1)}(+0) = \\ h^{(n-2)}(+0) \rightarrow \\ \end{array} \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_2}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \ldots & -1 \\ \frac{b_1}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}.$$

$b_n \neq 0 \Rightarrow h(-0) \neq h(0) = h(+0)$; $b_n = 0 \Rightarrow h(-0) = h(0) = h(+0) = 0$.

$h(+0), h'(+0),\ldots, h^{(n-1)}(+0)$ sunt cond. inițiale ale ec. dif. (4.10).

Exemplul 4.1

Să se determine $h(t)$ pentru $G(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$.

$$h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = 3, \quad t > 0;$$

$$s^2 + 3s + 2 = 0, \text{ cu } p_1 = -2, p_2 = -1.$$

Soluţia generală este: $h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + 3/2, \quad t > 0.$

Din $h'(+0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1$ se obţine şi $h(0) = h(+0) = 0$.

Pt. $t = +0$ în $h(t)$ şi $h'(t) = -2C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-t}$ rezultă:

$$\begin{cases} h(+0) = \quad C_1 + C_2 + 3/2 = 0, \\ h'(+0) = -2C_1 - C_2 \quad = 1. \end{cases}$$

Din sistemul de ecuaţii se obţin: $C_1 = 1/2$, $C_2 = -2$ şi

$$h(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}\right)\pm(t).$$

Folosind relaţia $g(t) = D\,h(t)$ (4.6) se obţine:

$$g(t) = \left[\frac{1}{2}(-2)e^{-2t} - 2(-1)e^{-t}\right]\pm(t) + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}\right)¢(t) =$$

$$= \left(-e^{-2t} + e^{-t}\right)\pm(t) + \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2}\right)¢(t) = \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)\pm(t).$$

Rezultatul coincide cu acela de la exemplul 3.1.

Similar, cu relaţia: $h(t) = \left(\int_0^t g(¯)d¯\right)\pm(t)$ (4.5) se obţine:

$$h(t) = \left[\int_0^t \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)d¯\right]\pm(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^t - 2e^{-t}\Big|_0^t\right)\pm(t) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}\right)\pm(t). \quad ■$$

e. Pentru $m \le n$, $h(t)$ se calculează cu teorema dezvoltării.

$G(s)$ are următoarele categorii de polii:

$p_i \ne 0$, $i = \overline{1, r}$, distincţi, de multiplicitate $q_i \ge 1$;

$p_0 = 0$, de multiplicitate $\sim\, \ge 0$.

Total poli: $\sum_{i=1}^{r} q_i + \sim\, = n.$

$H(s) = \frac{1}{s} G(s)$ are polii lui $G(s)$ şi un pol suplimentar în $s = 0$.

$$h(t) = \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{\sim+1} \frac{M_{0j}}{(\sim - j + 1)!} t^{\sim - j + 1}}_{\text{pentru } \sim+1 \text{ poli în } s=0;} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{M_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t}}_{\text{pentru } n\text{-}\sim \text{ poli în } s \ne 0.} \right) \pm(t). \quad (4.12)$$

Coeficienţii au următoarele expresii:

$$M_{0j} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[s^{\sim} G(s) \right] \right\} \Bigg|_{s=0}, \quad j = \overline{1, \sim+1}, \quad (4.13)$$

$$M_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[(s-p_i)^{q_i} \frac{1}{s} G(s) \right] \right\} \Bigg|_{s=p_i}, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, q_i}. \quad (4.14)$$

Caz particular. Pentru $\sim\, = 0$ se obţine:

$$M_{01} = G(0) = \frac{b_0}{a_0}, \quad a_0 \ne 0. \quad (4.15)$$

$$h(t) = \left(\frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{M_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t} \right) \pm(t). \quad (4.16)$$

f. Pentru $m \geq n+1$, $h(t)$ este o funcţie generalizată.

Ea conţine impulsul Dirac şi derivatele sale până la ordinul $m-n-1$ inclusiv.

Făcând împărţirea dintre polinoamele lui $H(s)$ rezultă:

$$H(s) = \frac{1}{s}\frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = d_{m-n-1}s^{m-n-1} + \ldots + d_0 + \boxed{\frac{\tilde{b}_n^1 s^n + \ldots + \tilde{b}_0^1}{s(a_n s^n + \ldots + a_0)}}, \quad (4.17)$$

$$H^1(s) = \frac{\tilde{b}_n^1 s^n + \ldots + \tilde{b}_0^1}{s(a_n s^n + \ldots + a_0)}, \quad h^1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H^1(s)\}. \quad (4.19)$$

$$h(t) = d_{m-n-1}D^{m-n-1}\text{¢}(t) + \ldots + d_0\text{¢}(t) + h^1(t). \quad (4.18)$$

$H^1(s)$ satisface **d** şi **e**. $h^1(t)$ se calculează cu (4.12)–(4.14).

Exemplul 4.3

Pentru $G(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2}$ de la ex. 3.3 se determine $h(t)$.

Conform cu (4.17) se scrie:

$$H(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s}\frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{s^2 + 4s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)},$$

$$H(s) = \boxed{1} + \boxed{\frac{5}{2s}} + \boxed{\frac{1}{2(s+2)}} - \boxed{\frac{2}{s+1}},$$

$$h(t) = \text{¢}(t) + \frac{5}{2}\pm(t) + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t}\right)\pm(t).$$

Folosind relaţia $g(t) = D\,h(t)$ (4.6) se obţine ca la ex. 3.3:

$$g(t) = Dh(t) = D\text{¢}(t) + \frac{5}{2}D\pm(t) + \left(\frac{1}{2}De^{-2t} - 2De^{-t}\right)\pm(t) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t}\right)}_{\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}}D\pm(t) =$$

$$= D\text{¢}(t) + \text{¢}(t) + \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)\pm(t). \quad \blacksquare$$

g. Răspunsul indicial are proprietatea:

$\lim_{t \to +\infty} h(t) = \frac{b_0}{a_0}$ (4.22) ę $G(s)$ are toţi polii situaţi în $\{\mathrm{Re}\, s < 0\}$.

$G(s)$ are următoarele categorii de polii:

$p_i \neq 0,\ i = \overline{1, r}$, distincţi, de multiplicitate $q_i \geq 1$;

$p_0 = 0$, de multiplicitate $\sim\, \geq 0$. Total poli: $\sum_{i=1}^{r} q_i + \sim\, = n$.

$H(s) = \frac{1}{s} G(s)$ are polii lui $G(s)$ şi un pol suplimentar în $s = 0$.

Cu teorema dezvoltării s-a obţinut:

$$h(t) = \left(\sum_{j=1}^{\boxed{\sim}+1} \frac{M_{0j}}{(\boxed{\sim} - j + 1)!} t^{\sim - j + 1} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{M_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{\boxed{p_i} t} \right) \pm(t). \quad (4.12)$$

(4.22) are loc ę în (4.12) $\boxed{\sim} = 0$ şi $\mathrm{Re}\, \boxed{p_i} < 0,\ i = \overline{1, r}$.

În cazul

(4.22) are loc ę în (4.12) $\boxed{\sim} = 0$ şi $\mathrm{Re}\, \boxed{p_i} < 0,\ i = \overline{1, r}$.

$$h(t) = \left(\frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{M_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t} \right) \pm(t). \quad (4.16)$$

$\bar{h}$ = valoarea de *regim staţionar*

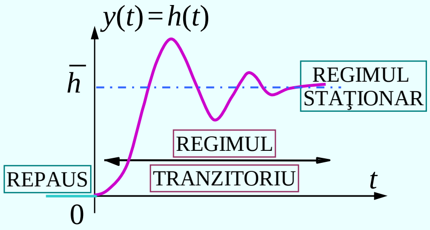


Fig. II.35

Trecerea de la repaus ($t < 0$) la regimul staţionar ($t = +\infty$) se face prin *regimul tranzitoriu*.

4.3. Integrala Duhamel

Conform relaţiei (4.6) se poate scrie:

$$g(t) = Dh(t) = (h * D\text{¢})(t)\pm(t). \qquad (4.23)$$

Cu (4.23) produsul de convoluţie $y(t)=(g*u)(t)\pm(t)$ devine:

$$y(t) = ((h * D\text{¢}) * u)(t)\pm(t) = ((h * u) * D\text{¢})(t)\pm(t), \qquad (4.24)$$

$$y(t) = D[(h * u)(t)]\pm(t) = D\left(\int_0^t h(t-\bar{\ })u(\bar{\ })d\bar{\ }\right)\pm(t) =$$

$$= D\left(\int_0^t h(\bar{\ })u(t-\bar{\ })d\bar{\ }\right)\pm(t). \qquad (4.25)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t h(t-\bar{\ })u(\bar{\ })d\bar{\ } = h(+0)u(t) + \int_0^t \frac{dh(t-\bar{\ })}{dt}u(\bar{\ })d\bar{\ }, \quad t>0. \qquad (4.26)$$