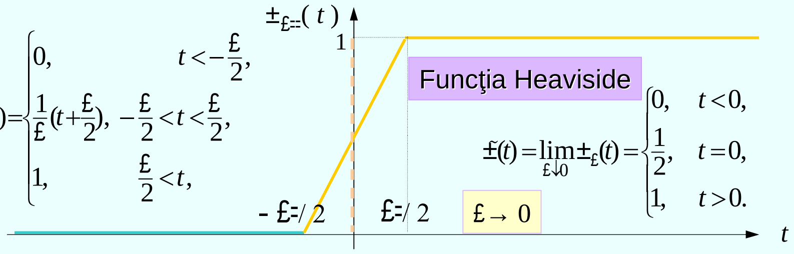
ANEXE

Anexa B1. Distribuţii (funcţii generalizate)

Funcţia Heaviside (treapta unitară) reprezintă un caz limită ideal al unor fenomene frecvent întâlnite în aplicaţii.
De exemplu, ea se poate obţine la limită în felul următor:

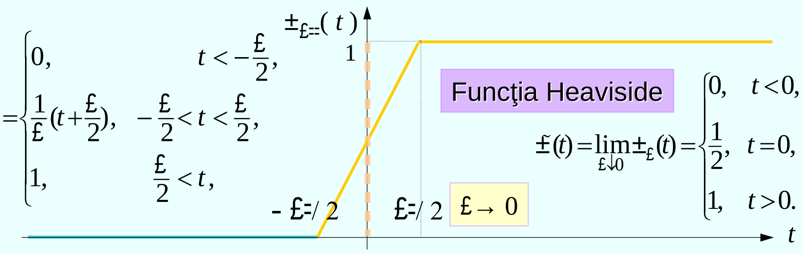
$$\pm_{£}(t)=\begin{cases}0, & t<-\frac{£}{2},\\ \frac{1}{£}\left(t+\frac{£}{2}\right), & -\frac{£}{2}<t<\frac{£}{2},\\ 1, & \frac{£}{2}<t,\end{cases}$$



$$\pm(t)=\lim_{£\downarrow 0}\pm_{£}(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \frac{1}{2}, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

Funcţia $\pm(t)$ nu este derivabilă în sensul analizei clasice.

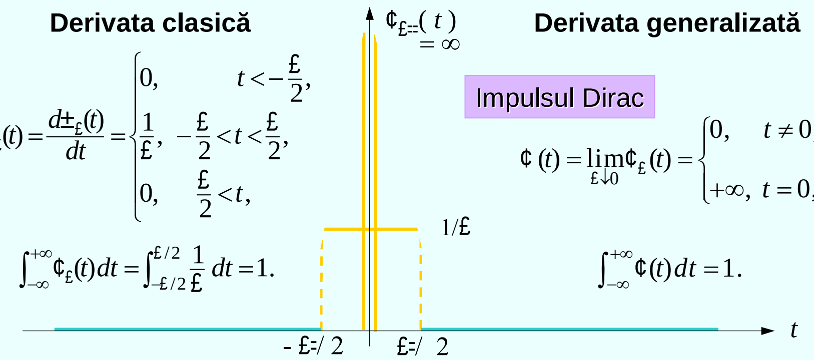
$$\pm_{£}(t)=\begin{cases}0, & t<-\frac{£}{2},\\ \frac{1}{£}\left(t+\frac{£}{2}\right), & -\frac{£}{2}<t<\frac{£}{2},\\ 1, & \frac{£}{2}<t,\end{cases}$$



$$\pm(t)=\lim_{£\downarrow 0}\pm_{£}(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \frac{1}{2}, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

Derivata clasică **Derivata generalizată**

$$¢_{£}(t)=\frac{d\pm_{£}(t)}{dt}=\begin{cases}0, & t<-\frac{£}{2},\\ \frac{1}{£}, & -\frac{£}{2}<t<\frac{£}{2},\\ 0, & \frac{£}{2}<t,\end{cases}$$



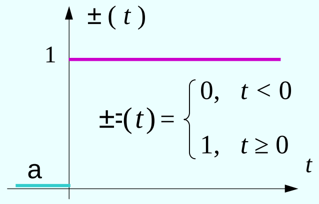
$$¢(t)=\lim_{£\downarrow 0}¢_{£}(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0,\\ +\infty, & t=0,\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}¢_{£}(t)dt=\int_{-£/2}^{£/2}\frac{1}{£}dt=1.$$

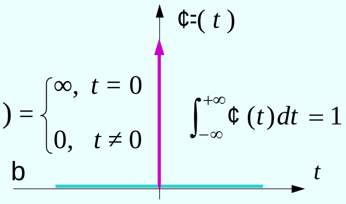
$$\int_{-\infty}^{+\infty}¢(t)dt=1.$$

Derivata generalizată a funcţiei Heaviside

Funcţia Heaviside — $\delta(t) = D\sigma(t)$ — Impulsul Dirac



$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Impulsul Dirac este o distribuţie (funcţie generalizată).

Proprietăţi: $\delta(-t) = \delta(t)$, $f(t)\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$,

Produsul de convoluţie a funcţiilor:

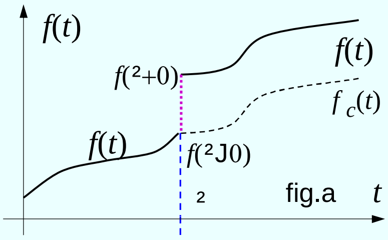
$$f_1 * f_2 \triangleq \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

δ este elementul unitate pe structura $(f, *)$: $f * \delta = \delta * f = f$.

O distribuţie (funcţie generalizată) conţine impulsul Dirac şi derivatele sale.

Derivata în sens distribuţii (generalizată) a unei funcţii

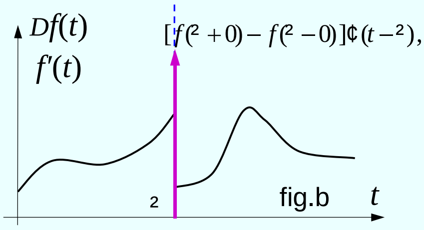
$f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, discontinuă în $t = \tau$; $f(\tau-0)$ şi $f(\tau+0)$ sunt finite.



$f_c(t)$ - partea continuă a lui $f(t)$.

Conform fig. a:

$$f(t) = f_c(t) + [f(\tau+0) - f(\tau-0)]\sigma(t-\tau).$$



Derivata clasică:

$$f'(t) = f'_c(t),\ t \neq \tau.$$

Derivata generalizată (fig. b):

$$Df(t) = f'(t) + [f(\tau+0) - f(\tau-0)]\delta(t-\tau);$$

Derivata generalizată de ordinul 2 :

$$D^2 f(t) = f''(t) + [f'(\tau + 0) - f'(\tau - 0)]\delta(t - \tau) +$$

$$+ [f(\tau + 0) - f(\tau - 0)]D\delta(t - \tau)$$

Derivata generalizată de ordinul k :

$$D^k f(t) = f^{(k)}(t) + [f^{(k-1)}(\tau + 0) - f^{(k-1)}(\tau - 0)]\delta(t - \tau) +$$

$$+ [f^{(k-2)}(\tau + 0) - f^{(k-2)}(\tau - 0)]D\delta(t - \tau) + \ldots +$$

$$+ [f(\tau + 0) - f(\tau - 0)]D^{k-1}\delta(t - \tau), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

Anexa A1. Transformarea Laplace

1.1. Transformarea directă

Definiţia 1. Fie $f(t)$ o funcţie de variabila reală t, numită ***funcţie original***, care satisface condiţiile:

1° $f(t) = 0$, $t < 0$;

2° $f(t)$ este continuă pe porţiuni; pe orice interval finit are cel mult un număr finit de discontinuităţi; în punctele t de discontinuitate există limitele finite $f(t-0)$, $f(t+0)$;

3° există $M > 0$ şi $a \in \mathbf{R}$ astfel ca $|f(t)| \le Me^{at}$, $t \ge 0$.

Transformata Laplace a funcţiei $f(t)$, numită ***funcţie imagine***, este funcţia de variabila complexă s

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathscr{L}\{f(t)\}, \quad s \in \mathbf{C}. \qquad \blacksquare$$

a. ***Observaţii***

1° Transformarea conform definiţiei 1 se mai numeşte şi Laplace directă unilaterală.

2° t este ***timpul***.

$|s|$ este o pulsaţie; s se numeşte ***frecvenţa complexă***.

$\mathscr{L}$ este o transformare din domeniul timpului în domeniul frecvenţelor complexe.

3° Ipoteza 1° din definiţia 1 poate fi omisă.

Pentru $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, din definiţia 1 rezultă că $F(s)$ corespunde numai restricţiei lui f la intervalul $[0,+\infty)$.

În ipoteza 1° (def. 1) condiţiile iniţiale $f^{(i)}(-0)$, $i = 0,1,2,....$ sunt nule.

b. ***Teoreme***

I. Liniaritatea este asigurată prin definiţie:

$\forall f_1, f_2$ – funcţii originale, $\forall c_1, c_2$ – constante reale;

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

II. Imaginea derivatei clasice a originalului:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(+0).$$

În general

$$\mathscr{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s) - f(+0)s^{k-1} - \ldots - f^{(k-1)}(+0), \ k = \overline{1,n}.$$

III. Imaginea derivatei generalizate a originalului:

$$\mathscr{L}\{Df(t)\} = sF(s) - f(-0).$$

Se ţine seama de: $\begin{cases} \mathscr{L}\{f\,'(t)\} = sF(s) - f(+0), \\ Df(t) = f\,'(t) + [f(+0) - f(-0)]\text{¢}(t). \end{cases}$

$$\mathscr{L}\{Df(t)\} = \mathscr{L}\{f\,'(t) + [f(+0) - f(-0)]\text{¢}(t)\} =$$

$$= \mathscr{L}\{f\,'(t)\} + [f(+0) - f(-0)] =$$

$$= sF(s) - \cancel{f(+0)} + \cancel{f(+0)} - f(-0) = sF(s) - f(-0).$$

In general:

$$\mathscr{L}\{D^k f(t)\} = s^k F(s) - f(-0)s^{k-1} - \ldots - f^{(k-1)}(-0), \ k = \overline{1,n}.$$

1.2. Transformarea inversă

Definiţia 2. În condiţiile def. 1 transformarea inversă este:

$$\frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Teoreme

I. Originalul unei funcţii raţionale (*teorema dezvoltării*)

Funcţia imagine: $F(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)}$, grad $Q = m <$ grad $P = n$,

cu polii distincţi p_i, de multiplicitate q_i, $i = \overline{1,r}$, $\sum_{i=1}^{r} q_i = n$.

Funcţia imagine: $f(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q_i} \dfrac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t}, \ t \geq 0,$

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}[(s-p_i)^{q_i}F(s)]\right\}_{s=p_i}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,q_i}.$$

II. *Valoarea iniţială* a originalului: $f(+0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s).$

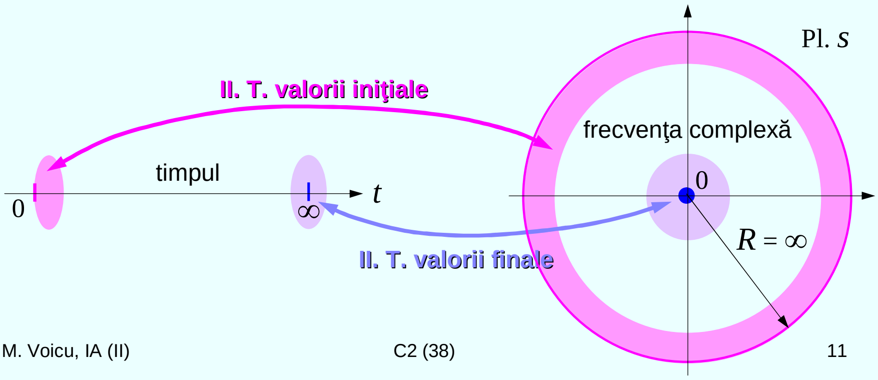
III. *Valoarea finală* a originalului: $f(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s).$

II şi III pun în corespondenţă

vecinătatea lui $t = 0$ cu vecinătatea lui $|s| = +\infty$

respectiv

vecinătatea lui $t = +\infty$ cu vecinătatea lui $s = 0$.



Capitolul II

TRANSFERUL INTRARE–IEŞIRE
AL SISTEMELOR DINAMICE LINIARE

1. Descrierea matematică a sistemelor dinamice

1.1. Ce sunt modelele matematice?

Sistemele evoluează în timp ⇨ ***sisteme dinamice***.

Relaţii între variabile:

ecuaţii diferenţiale şi/sau ***integro-diferenţiale***;

modelul matematic sau ***sistemul abstract***.

Noţiuni distincte: ***sistem real*** şi ***sistem abstract***.

Sistemul abstract este o ***imagine*** a sistemului real.

Sistemul abstract se validează prin comparare cu cel real.

1.2. Ecuaţiile sistemelor fizico-tehnice

Se utilizează legile generale ale naturii.

Tabelul II.1. Sumar al variabilelor fizico-tehnice

TIP: / SISTEM:	VARIABILA LONGITUDINALĂ		VARIABILA TRANSVERSALĂ	
ELECTRIC	**CURENTUL**	i	**TENSIUNEA**	u
MECANIC	**FORŢA**	f	**VITEZA DE TRANSLAŢIE**	v
	CUPLUL	c	**VITEZA UNGHIULARĂ**	μ
FLUIDIC	**DEBITUL**	q	**PRESIUNEA**	p
TERMIC	**FLUXUL TERMIC**	q	**TEMPERATURA**	—

Dpdv energetic –
trei clase de **sisteme**:

- **disipative**
- **cu acumulare inductivă**
- **cu acumulare capacitivă**

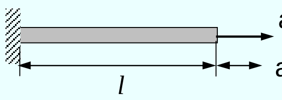
Tabelul II.2.a. Sumar al ecuaţiilor sistemelor

SISTEM DE TIP:	NATURA FIZICĂ:	PARAMETRUL FIZIC:		ECUAŢIA:
DISIPATIV	ELECTRIC	REZISTENŢA ELECTRICĂ	R	$i = \frac{1}{R} u$
	MECANIC	COEFICIENTUL DE FRECARE	K_f	$f = K_f v$ $c = K_f \mu$
	FLUIDIC	REZISTENŢA FLUIDICĂ	R_f	$q = \frac{1}{R_f} p$
	TERMIC	REZISTENŢA TERMICĂ	R_t	$q = \frac{1}{R_t} -$

Tabelul II.2.b. Sumar al ecuaţiilor sistemelor

SISTEM DE TIP:	NATURA FIZICĂ:	PARAMETRUL FIZIC:		ECUAŢIA:
ACUMULATOR INDUCTIV	ELECTRIC	INDUCTANŢA ELECTRICĂ	L	$u = L \frac{di}{dt}$
	MECANIC	COEFICIENTUL DE ELASTICITATE	K	$v = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$ $\mu = \frac{1}{K} \frac{dc}{dt}$
	FLUIDIC	INERTANŢA FLUIDICĂ	I	$p = I \frac{dq}{dt}$

Legea lui Hooke



a:f

a:l = αa f : at ↪ $\frac{\text{a}l}{\text{a}t} = \frac{1}{K} \frac{\text{a}f}{\text{a}t}$

a$t \to 0$ ↪ $v = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$

Tabelul II.2.c. Sumar al ecuaţiilor sistemelor

SISTEM DE TIP:	NATURA FIZICĂ:	PARAMETRUL FIZIC:	ECUAŢIA:
ACUMULATOR CAPACITIV	ELECTRIC	CAPACITATEA ELECTRICĂ C	$i = C\frac{du}{dt}$
	MECANIC	MASA INERTĂ M	$f = M\frac{dv}{dt}$
		MOMENTUL DE INERŢIE J	$c = J\frac{d\omega}{dt}$
	FLUIDIC	CAPACITATEA FLUIDICĂ C_f	$q = C_f\frac{dp}{dt}$
	TERMIC	CAPACITATEA TERMICĂ C_t	$q = C_t\frac{d\theta}{dt}$

Ecuaţia calorimetrică $\Delta Q = mc\,\Delta\theta$ $: \Delta t \Rightarrow$ $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = C_t\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0 \Rightarrow$ $q = C_t\frac{d\theta}{dt}$

Exemplul 1.1 Sistem: resort (1) – amortizor (2) – masă inertă (3)

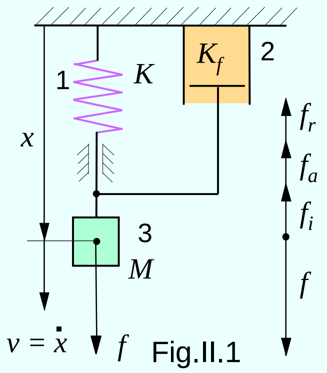


Fig.II.1

element disipativ $f_a = K_f v$

element acumulator inductiv $f_r = K\int_0^t v(t)dt$

element acumulator capacitiv $f_i = M\frac{dv}{dt}$

$$f_i + f_a + f_r = f$$

$$M\frac{dv}{dt} + K_f v + K\int_0^t v(\tau)d\tau = f(t) \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x_0,\ dx(t)/dt\big|_{t=t_0} = v(t_0) = v_0,\ t_0 \geq 0,\ x(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau\ .\ \blacksquare$$

Exemplul 1.2 Sistem: rezistenţă ($\boldsymbol{R}$) – inductanţă ($\boldsymbol{L}$) – capacitate ($\boldsymbol{C}$)

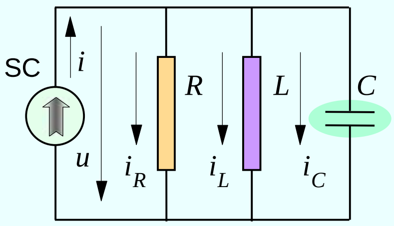


Fig.II.2

element disipativ $\quad i_R = \dfrac{1}{R} u$

element acumulator inductiv $\quad i_L = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t u(\tau)d\tau$

element acumulator capacitiv $\quad i_C = C\dfrac{du}{dt}$

$$i_C + i_R + i_L = i.$$

$$C\frac{du}{dt} + \frac{1}{R}u + \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau = i(t). \quad (1.2) \qquad \blacksquare$$

Sistemele (1.1) şi (1.2) au un model matematic unic.

Ex.1.1 $$\underbrace{M\frac{dv}{dt}}_{\ddot{y}} + \underbrace{K_f v}_{\dot{y}} + \underbrace{K\int_0^t v(\tau)d\tau}_{y} = \underbrace{f(t)}_{u}, \quad (1.1)$$

Ex.1.2 $$\underbrace{C\frac{du}{dt}}_{\ddot{y}} + \underbrace{\frac{1}{R}u}_{\dot{y}} + \underbrace{\frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)d\tau}_{y} = \underbrace{i(t)}_{u}. \quad (1.2)$$

Folosind: în (1.1) $\quad \int_0^t v(\tau)d\tau = y, \quad v = \dot{y}, \quad \dot{v} = \ddot{y}, \quad u = f;$

în (1.2) $\quad \int_0^t u(\tau)d\tau = y, \quad u = \dot{y}, \quad \dot{u} = \ddot{y}, \quad i = u.$

rezultă: $$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t). \quad (1.3)$$

Sistemele (1.1) şi (1.2) sunt ***izomorfe***.

Au modelul matematic unic:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t), \quad (1.3)$$

cu condiţiile iniţiale: $y(t_0) = y_0, \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \dot{y}_0.$

Modelul matematic (1.3) reprezintă

o clasă de sisteme izomorfe.

Ordinul *modelului matematic* = numărul de acumulatoare de energie independente = ***numărul de condiţii iniţiale***.

1.3. Liniaritate şi invarianţă în timp

Fig.II.3

$u(t) \to y(t)$ (1.4)

(cauza) (efectul)

$u(t)$ - ***mărimea de intrare*** ; $y(t)$ - ***mărimea de ieşire***

$$u(t) = u_1(t) \to y(t) = y_1(t), \qquad u(t) = u_2(t) \to y(t) = y_2(t).$$

Definiţia 1. (*Principiul suprapunerii efectelor*)

Sistemul (1.4) este ***liniar*** dacă pentru orice c_1 şi c_2 are loc:

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \to y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \blacksquare$$

Orice abatere de la comportarea liniară ➧ ***sistem neliniar***

O clasă importantă de sisteme reale este aceea ale cărei modele matematice sunt constituite din ***ecuaţii diferenţiale ordinare liniare cu coeficienţi constanţi***.

Definiţia 2

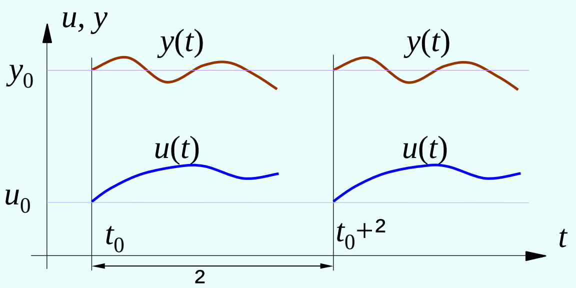
Sistemul (1.4) se numeşte ***neted*** şi ***cu parametri concentraţi*** dacă modelul matematic este o ecuaţie sau un set de ecuaţii diferenţiale ordinare. ■

Definiţia 3

Sistemul (1.4) (fig.II.3) se numeşte ***invariant în timp*** dacă toţi parametrii săi sunt invarianţi în timp. ■

Calitatea esenţială a unui sistem invariant în timp: sub acţiunea intrării $u(t)$, evoluţia ieşirii $y(t)$ este ***invariantă*** pentru orice translaţie 2 a lui t_0, pentru acelaşi $y_0 = y(t_0)$ şi $u(t)$ translat în timp cu acelaşi 2.

Fig.II.6



Un *sistem neted, cu parametri concentraţi, invariant în timp* se reprezintă prin ecuaţii diferenţiale ordinare cu coef. const.

1.4. Funcţia de transfer

Un sistem neted, cu parametri concentraţi, invariant în timp şi liniar, cu o intrare şi o ieşire, are modelul matematic:

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+..+a_0 y=b_m\frac{d^m u}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+..+b_0 u,\ \ t\in\mathbf{R},\quad (1.5)$$

$$a_i\in\mathbf{R},\ \ a_n\neq 0,\ b_i\in\mathbf{R}.$$

m şi n sunt corelate cu numărul de acumulatoare de energie, semnificative şi independente, din sistem.

Derivatele sunt în ***sens generalizat*** sau în ***sens distribuţii***.

Până la momentul iniţial $t_0 = 0$ sistemul se află în repaus:

$$u(t)\equiv 0,\ \ y(t)\equiv 0,\ \ t<0.\qquad (1.6)$$

Semnificaţia relaţiei $u(t)\equiv 0,\quad y(t)\equiv 0,\quad t<0$. (1.6)

Observaţia 1.1

(1.6) – principiul cauzalităţii:

cauza nulă produce ***efectul nul***;

(1.6) – principiului non-anticipării:

efectul nu anticipează ***cauza***. ■

Definiţia 4

Un sistem conform cu (1.6) se numeşte ***non-anticipativ***.

El se numeşte ***anticipativ*** dacă

$u(t)\equiv 0\ (t<0)$ implică $y(t)\not\equiv 0\ (t<0)$. ■

(1.6) implică $u^{(k)}(-0)=0,\quad k=\overline{0,m-1},$ (1.7)

$y^{(k)}(-0)=0,\quad k=\overline{0,n-1}.$ (1.8)

Se consideră sistemul:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + .. + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + .. + b_0 u, \qquad (1.5)$$

$$u(t) \equiv 0, \; y(t) \equiv 0, \; t < 0. \qquad (1.6)$$

$$u^{(k)}(-0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \qquad (1.7)$$

$$y^{(k)}(-0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \qquad (1.8)$$

Se aplică transformarea Laplace. Se obţine:

$$U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\}, \quad Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\},$$

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0\right) U(s), \qquad (1.9)$$

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} U(s). \qquad (1.10)$$

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} U(s). \qquad (1.10)$$

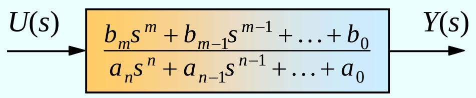


Fig.II.7

Definiţia 5

Raportul dintre $Y(s)$ şi $U(s)$ se numeşte ***funcţia de transfer***. ■

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}, \qquad (1.11)$$

Ecuaţia intrare – ieşire:

$$Y(s) = G(s) U(s). \qquad (1.12)$$

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_0}. \qquad (1.11)$$

Polinoamele din (1.11) sunt relativ prime.

$G(s)$ este o raţională de $s\in\mathbf{C}$. $G(s)$ nu depinde de $U(s)$ şi $Y(s)$.

$G(s)$ depinde de structura şi parametrii sistemului.

$G(s)$ poate fi scrisă sub forma:

$$G(s)=\frac{b_m\prod_1^m(s-z_i)}{a_n\prod_1^n(s-p_j)},\ \ z_i\neq p_j, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (1.13)$$

$G(z_i)=0,\quad i=\overline{1,m},\qquad z_i\in\mathbf{C}$ – *zerourile finite*,

$|G(p_j)|=+\infty,\ \ j=\overline{1,n},\qquad p_j\in\mathbf{C}$ – *polii finiţi*.

Definiţia 6

Polinomul monic

$$z(s)=\prod_1^m(s-z_i)\triangleq s^m+\frac{b_{m-1}}{b_m}s^{m-1}+\ldots+\frac{b_1}{b_m}s+\frac{b_0}{b_m}, \qquad (1.17)$$

se numeşte ***polinomul zerourilor***.

Polinomul monic

$$p(s)=\prod_1^n(s-p_j)\triangleq s^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}s+\frac{a_0}{a_n} \qquad (1.18)$$

se numeşte ***polinomul polilor***. ■

Polinom monic – coef. termenului de grad maxim este 1.

° $=\max(m,n)$ se numeşte ***ordinul sistemului***.

Rolurile *operatoriale* ale polinoamelor din $G(s)$

$$Y(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+...+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+...+a_0}U(s), \qquad (1.10)$$

$$G(s)=\frac{b_m\prod_1^m(s-z_i)}{a_n\prod_1^n(s-p_j)}=\frac{b_m\,z(s)}{a_n\,p(s)}, \qquad (1.13)$$

Se ilustrează în continuare prin două exemple că:

$b_m z(s)$ include operaţii de amplificare şi derivare; el are efect de ***anticipare***.

$\dfrac{1}{a_n\,p(s)}$ include operaţii bazate pe integrare; el are efect de ***întârziere***.

Exemplificare prin două cazuri limită:

1î Cazul ***derivatorului***

$G(s)=s, \quad Y(s)=sU(s),$ respectiv, $y(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$;

$u(t) = \sin\mu\, t \;\; ➠ \;\; y(t) = \mu\cos\mu\, t, \;\; t > 0.$

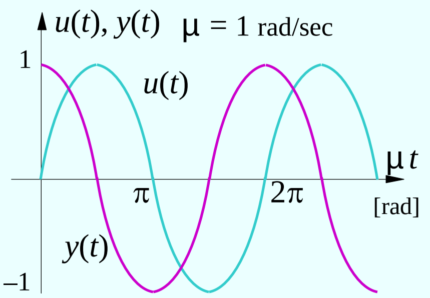


Fig.II.8

$y(t)$ este în avans de fază cu $\pi/2$ faţă de $u(t)$.

Ieşirea derivatorului ***anticipează*** intrarea.

2° Cazul ***integratorului***

$G(s)=\frac{1}{s},\;\; Y(s)=\frac{1}{s}U(s),$ respectiv $y(t)=\int_0^t u(\tau)d\tau\,;$

$u(t)=\sin \mu t \;\Rightarrow\; y(t)=(1-\cos \mu t)/\mu,\;\; y_s(t)=-(\cos \mu t)/\mu,\;\; t>0.$

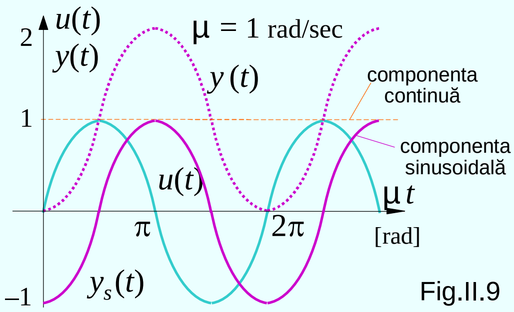


Fig.II.9

$y_s(t)$ este în întârziere de fază cu $\pi/2$ faţă de $u(t)$.

Ieşirea integratorului ***întârzie*** intrarea.

Observaţia 1.2

- *polinomul zerourilor* modelează operaţii de *amplificare derivare*; efect de ***anticipare*** a lui $y(t)$ în raport cu $u(t)$.
- *inversul polinomului polilor* modelează operaţii bazate pe *integrare*; efect de ***întârziere*** a lui $y(t)$ în raport cu $u(t)$.■

Observaţia 1.3

Efectul se manifestă cu întârziere faţă de cauză.

Operatorul integrator $\frac{1}{a_n p(s)}$ este ***dominant*** faţă de operatorul derivator $b_m z(s)$. Dominanţa are loc *numai dacă*:

$$m<n. \tag{1.19}$$

Definiţia 7

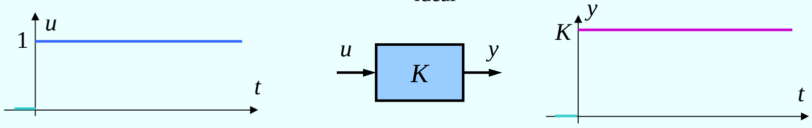
$G(s)$, cu (1.19), se numeşte *strict proprie*.

Pt. $m=n$ se numeşte *proprie* şi pt. $m>n$ – *improprie*. ■

Exemplul 1.4. Se pot obţine $G(s)$ cu $m \geq n$, contrar cu (1.19). Motivul: la modelare s-au făcut idealizări şi simplificări.

Caz tipic: amplificatorul electronic de cc. Uzual se adoptă:

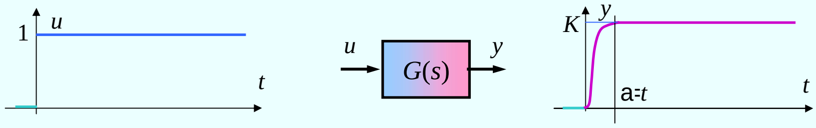
$$y(t) = Ku(t), \qquad G_{\text{ideal}}(s) = K \quad (m = n = 0).$$



O analiză riguroasă arată că :

$$G_{\text{real}}(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}, \qquad 0 < a_i << 1,\ i = 1,2,3.$$

Amplificatorul (real) întârzie ieşirea faţă de intrare.



Pt. $u(t)$ lent variabil, întârzierea este neglijabilă.

Pt. t suficient de mare, respectiv $|s|$ suficient de mic

se obţine:

$$G_{\text{real}}(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \cong G_{\text{ideal}}(s) = K,$$

adică se acceptă $a_i \cong 0,\ i = 1,2,3.$

Pentru intrare treaptă unitară,

$$u(t) = \sigma(t), \quad U(s) = 1/s,$$

cf. teoremei valorii finale se obţine:

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG_{\text{real}}(s)U(s) =$$
$$= \lim_{s\to 0} sG_{\text{real}}(s)(1/s) = \lim_{s\to 0} G_{\text{real}}(s) = G_{\text{real}}(0) = K.$$

Pentru intrare treaptă unitară, cf. teoremei valorii iniţiale se obţine:

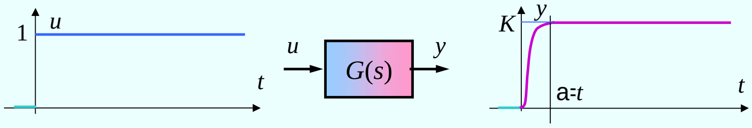
$$y\,(+0) = \lim_{t\downarrow 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sG_{\text{real}}(s)U(s) =$$

$$= \lim_{s\to\infty} sG_{\text{real}}(s)(1/s) = \lim_{s\to\infty} K/(a_3s^3+a_2s^2+a_1s+1) = 0.$$

Pt. $t > 0$ foarte mic, respectiv $|s|$ foarte mare,

$G_{\text{real}}(s) \cong K$ nu mai este acceptabilă.

Acest fapt este ilustrat de răspunsul amplificatorului:



■

Observaţia 1.4

După idealizări / simplificări ale modelului matematic se poate lucra cu funcţii de transfer proprii sau improprii. Rezultatele obţinute trebuie interpretate în conformitate cu idealizările / simplificările modelului matematic. ■